شارح: المقاومة والمقاومة النوعية للموصِّلات

في هذا الشارح، سوف نتعلَّم كيف نربط أبعاد جسم وحركة الإلكترونات الحرَّة خلاله بمقاومته.

يُمكن الحصول على المقاومة الكهربية لجسم باستخدام الصيغة الآتية.

صيغة: المقاومة الكهربية

إذا طُبِّق فرق الجهد V، على جسم، ومرَّ به تيار شدَّته I، فإن المقاومة R تُعطَى بالصيغة:

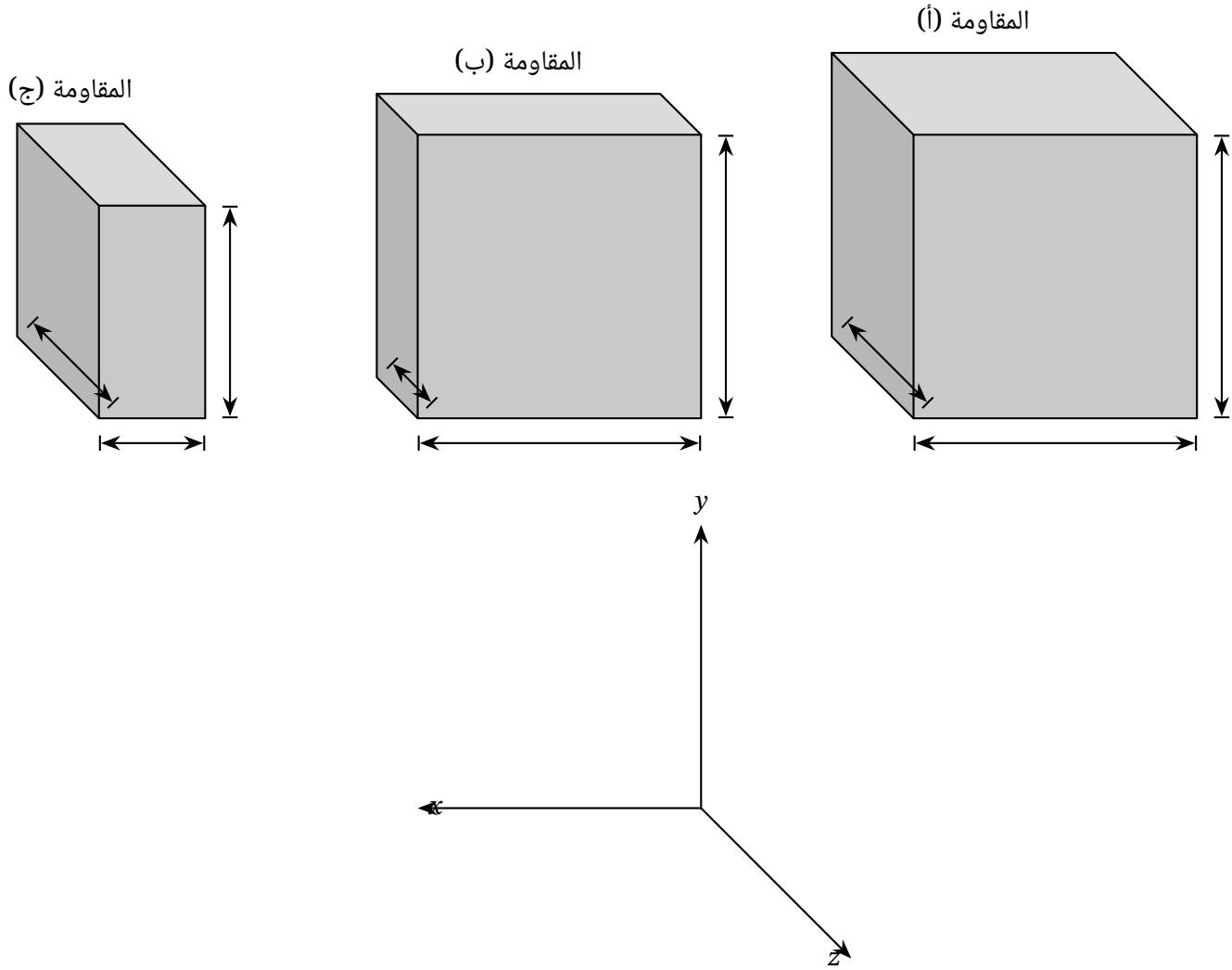
$$R = \frac{V}{I}.$$

تُعَدُّ المقاومة إحدى خواصِّ الجسم. وتعتمد مقاومة الجسم على عاملين:

- أبعاد الجسم.
- المقاومة النوعية، وهي إحدى خواصِّ المادة التي يتكوَّن منها الجسم.

هيَّا نرَ أولًا كيف تؤثِّر أبعاد الجسم على مقاومته.

يوضِّح الشكل الآتي ثلاث مقاومات. تمثِّل مساحة وجه المقاومات في المستوى xy مساحة المقطع لكلِّ مقاومة.



المقاومتان (أ)، (ب) لهما مساحة المقطع نفسها. وهي أكبر من مساحة مقطع المقاومة (ج).

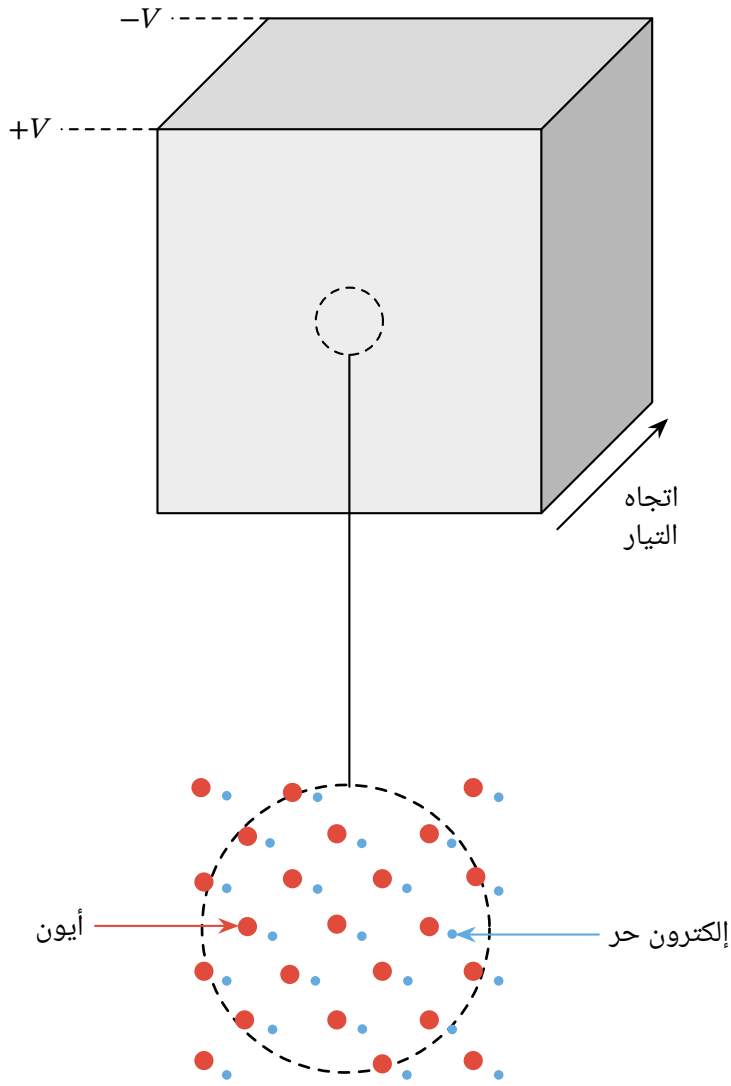
المقاومتان (أ)، (ج) لهما الطول نفسه في اتجاه z. وهو أكبر من طول المقاومة (ب).

يؤثِّر طول المقاومة ومساحة مقطعها على كيفية تحرُّك الإلكترونات الحرَّة عبر المقاومة. لفهْم ذلك، من المُفيد أن نطَّلِع على نموذج للبنية الداخلية للمقاومة.

تُصنَع المقاومة من فلز موصِّل للكهرباء، يتكوَّن من شبكة من الذرات بها إلكترون واحد أو أكثر في مداراتها الخارجية، وترتبط هذه الإلكترونات ارتباطًا ضعيفًا للغاية بنواة الذرة، ويُمكن أن تنتقل من ذرة إلى أخرى بواسطة قوة كهربية صغيرة.

يُمكن تمثيل المقاومة بأنها تتكوَّن من أيونات موجبة الشحنة، وإلكترونات حرَّة تتحرَّك بين هذه الأيونات. ويُمكن تمثيل الإلكترونات الحرَّة بأنها تتحرَّك بطريقة تُشبِه حركة جزيئات الغاز.

يوضِّح الشكل الآتي مقاومة مُطبَّقًا عليها فرق جهد عمودي على مساحة مقطعها.



يُمكن إيجاد شدَّة التيار الناتِج عن فرق الجهد المُطبَّق من خلال الصيغة الآتية.

صيغة: شدَّة التيار الكهربي

إذا مرَّت الشحنة Q، عبر نقطة في الجسم خلال الزمن t، فإن شدَّة التيار I، المارِّ في الجسم تُعطَى بالصيغة:

$$I = \frac{Q}{t}.$$

إن الشحنات التي تتحرَّك داخل المقاومة هي الإلكترونات الحرَّة.

يوضِّح لنا الشكل الذي يمثِّل بنية المقاومة أنه كلما زادت مساحة مقطع المقاومة، زاد عدد الإلكترونات الحرَّة التي يُمكن أن تشغل هذه المساحة.

يُمكننا إذن تعديل صيغة شدَّة التيار الكهربي إلى الصورة:

$$I \propto A \times \frac{1}{t},$$

حيث A مساحة مقطع المقاومة.

يُمكن حساب الزمن t، الذي يستغرقه إلكترون حرٌّ لكي يقطع طول المقاومة من الصيغة:

$$t = \frac{L}{v},$$

حيث v السرعة المتوسطة للإلكترونات الحرَّة، L طول المقاومة.

يُمكننا إذن تعديل صيغة شدَّة التيار الكهربي إلى الصورة:

$$I \propto A \times \frac{v}{L}$$
$$I \propto \frac{Av}{L}.$$

لقد رأينا أن:

$$R = \frac{V}{I}.$$

بالنسبة إلى فرق الجهد الثابت، يُمكن القول إن:

$$R \propto \frac{1}{I}.$$

يُمكننا التعويض بالتعبير الخاص بـ I في هذا التعبير لـ R. فنحصل على:

$$R \propto \frac{L}{Av}.$$

يُمكن التعبير عن ذلك في صورة تفصل الكميات التي تناظِر أبعاد المقاومة كما يأتي:

$$R \propto \frac{1}{v} \times \frac{L}{A}.$$

نلاحِظ هنا أن أبعاد المقاومة تؤثِّر على قيمة المقاومة كما يأتي:

- تتناسب قيمة المقاومة طرديًّا مع طول المقاومة
- تتناسب قيمة المقاومة عكسيًّا مع مساحة مقطع المقاومة.

كما ذكرنا من قبل، فإن العامل الذي يؤثِّر على قيمة المقاومة، ويرجع إلى نوع المادة المصنوعة منها، وليس أبعادها يُسمَّى المقاومة النوعية للمادة. يُرمَز للمقاومة النوعية بالرمز ρ.

رأينا أن:

$$R \propto \frac{1}{v} \times \frac{L}{A},$$

إذن نجد أن:

$$\rho \propto \frac{1}{v}.$$

كلما زادت المقاومة النوعية للمادة، تحرَّكت الإلكترونات الحرَّة أبطأ في هذه المادة.

يُمكن التعبير عن المقاومة بدلالة المقاومة النوعية، كما يأتي:

$$R = \frac{\rho L}{A}.$$

تعتمد المقاومة النوعية لأيِّ مادة على كميتين:

- معدَّل حركة الإلكترونات الحرَّة في المادة
- كثافة الإلكترونات الحرَّة في المادة.

يُمكننا أن نلاحِظ من هنا أن معدَّل حركة الإلكترونات الحرَّة في مادة ما، وكثافة الإلكترونات الحرَّة في هذه المادة، يعتمد كلٌّ منهما على الآخَر.

يُمكن إعادة ترتيب الصيغة التي تربط المقاومة بالمقاومة النوعية لجعل المقاومة النوعية في طرف بمفردها، كما يأتي:

$$R \times \frac{A}{L} = \frac{\rho L}{A} \times \frac{A}{L} = \rho.$$

من ثَمَّ، يُمكننا تعريف المقاومة النوعية.

تعريف: المقاومة النوعية

إذا كانت المقاومة R لجسم، ومساحة مقطعه A، وطوله L، فإن المقاومة النوعية ρ، تُعطَى بالصيغة:

$$\rho = \frac{RA}{L}.$$

يُمكن الحصول على وحدة النظام الدولي للكمية:

$$\frac{A}{L}$$

كالآتي:

$$\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}} = \mathrm{m}،$$

إذن وحدة المقاومة النوعية في النظام الدولي للوحدات هي:

$$\Omega\cdot\mathrm{m}.$$

وبالكلمات: أوم متر.

تتغيَّر المقاومة النوعية بتغيُّر درجة الحرارة. في معظم المواد، تزيد المقاومة النوعية بزيادة درجة حرارة الجسم. فزيادة درجة الحرارة تعمل على زيادة معدَّل التصادم بين الأيونات والإلكترونات الحرَّة، وهو ما يُقلِّل من الحركة الكلية للإلكترونات الحرَّة في الموصِّل. وسنوضِّح آلية ذلك في نهاية الشارح.

لنلقِ نظرةً على مثال نحدِّد فيه المقاومة النوعية للمادة.

مثال ١: تحديد المقاومة النوعية للمادة

سلك مصنوع من مادة مجهولة مقاومته $125\ \mathrm{m}\Omega$. طول السلك $1.8\ \mathrm{m}$، ومساحة مقطعه $2.35 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^2$. ما المقاومة النوعية للمادة المصنوع منها السلك؟ أوجد الإجابة بالصيغة العلمية، لأقرب منزلة عشرية.

الحل

يُمكن إيجاد المقاومة النوعية ρ، من الصيغة:

$$\rho = \frac{RA}{L}،$$

حيث R مقاومة السلك، A مساحة المقطع للسلك، L طول السلك.

بالتعويض بالقِيَم المُعطاة في السؤال، نحصل على:

$$\rho = \frac{125 \times 10^{-3}\ \Omega \times 2.35 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^2}{1.8\ \mathrm{m}}.$$

يُمكن كتابة هذا على الصورة:

$$\rho = \frac{0.125\ \Omega \times 2.35 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^2}{1.8\ \mathrm{m}}.$$

يُمكن كتابة هذا مرَّة أخرى على الصورة:

$$\rho = \frac{0.125\ \Omega \times 2.35 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^2}{1.8\ \mathrm{m}} = \frac{2.9375 \times 10^{-6}\ \Omega\cdot\mathrm{m}^2}{1.8\ \mathrm{m}}.$$

بالتقريب لأقرب منزلة عشرية، نحصل على:

$$1.6 \times 10^{-6}\ \Omega\cdot\text{m}.$$

لنلقِ نظرةً على مثال نحدِّد فيه أبعاد مقاومة مصنوعة من مادة معلومة مقاومتها النوعية.

مثال ٢: تحديد أبعاد مقاومة معلومة مقاومتها النوعية

سلك نحاسي مقاومته $12.8\ \text{m}\Omega$، ومساحة مقطعه $1.15 \times 10^{-5}\ \text{m}^2$. أوجد طول السلك. استخدِم القيمة $1.7 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m}$ للمقاومة النوعية للنحاس. أوجد الإجابة لأقرب منزلة عشرية.

الحل

يُمكن إيجاد المقاومة النوعية ρ، للمادة من الصيغة:

$$\rho = \frac{RA}{L}،$$

حيث R مقاومة السلك، A مساحة مقطع السلك، L طول السلك.

يُمكن إعادة ترتيب هذه الصيغة لجعل L في طرف بمفرده، كما يأتي:

$$\begin{aligned}
\rho \times L &= \frac{RA}{L} \times L = RA \\
\rho L &= RA \\
\frac{\rho L}{\rho} &= \frac{RA}{\rho} = L \\
L &= \frac{RA}{\rho}.
\end{aligned}$$

بالتعويض بالقِيَم المُعطاة في السؤال، نحصل على:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{12.8 \times 10^{-3}\ \Omega \times 1.15 \times 10^{-5}\ \text{m}^2}{1.7 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m}} \\
L &= \frac{1.28 \times 10^{-2}\ \Omega \times 1.15 \times 10^{-5}\ \text{m}^2}{1.7 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m}} \\
L &= \frac{1.472 \times 10^{-7}\ \Omega\cdot\text{m}^2}{1.7 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m}} \\
L &= \frac{1.472 \times 10^{-7}}{1.7 \times 10^{-8}}\ \text{m}.
\end{aligned}$$

بالتقريب لأقرب منزلة عشرية، نحصل على: $8.7\ \text{m}$.

لنلقِ نظرةً على مثال آخَر نحدِّد فيه أبعاد مقاومة مصنوعة من مادة معلومة مقاومتها النوعية.

مثال ٣: تحديد أبعاد مقاومة معلومة مقاومتها النوعية

سلك نحاسي مقاومته $22\ \text{m}\Omega$، وطوله $6.2\ \text{m}$. أوجد مساحة مقطعه. استخدِم $1.7 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m}$ للمقاومة النوعية للنحاس. أوجد الإجابة بالصيغة العلمية، لأقرب منزلة عشرية.

الحل

يُمكن إيجاد المقاومة النوعية ρ، للمادة من الصيغة:

$$\rho = \frac{RA}{L},$$

حيث R مقاومة السلك، A مساحة مقطع السلك، L طول السلك.

يُمكن إعادة ترتيب هذه الصيغة ليصبح A في طرف بمفرده، كما يأتي:

$$\begin{aligned}\rho \times L &= \frac{RA}{L} \times L = RA\\ \rho L &= RA\\ \frac{\rho L}{R} &= \frac{RA}{R} = A\\ A &= \frac{\rho L}{R}.\end{aligned}$$

بالتعويض بالقِيَم المُعطاة في السؤال، نحصل على:

$$\begin{aligned}A &= \frac{1.7 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m} \times 6.2\ \text{m}}{22 \times 10^{-3}\ \Omega}\\ A &= \frac{1.7 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m} \times 6.2\ \text{m}}{2.2 \times 10^{-2}\ \Omega}\\ A &= \frac{1.054 \times 10^{-7}\ \Omega\cdot\text{m}^2}{2.2 \times 10^{-2}\ \Omega}.\end{aligned}$$

بالتقريب لأقرب منزلة عشرية، نحصل على:

$$4.8 \times 10^{-6}\ \text{m}^2.$$

رأينا أنه يُمكننا إيجاد الشحنة التي تمرُّ عبر نقطة في مقاومة خلال زمن معيَّن من الصيغة:

$$Q = It.$$

يُمكن إيجاد الشحنة التي تمرُّ عبر نقطة في مقاومة خلال زمن ما من الصيغة:

$$Q = e \times N،$$

حيث e شحنة الإلكترون، N عدد الإلكترونات التي تمرُّ بهذه النقطة.

تعتمد قيمة N على كثافة الإلكترونات الحرَّة n في المادة، وحجم المقاومة المصنوعة من هذه المادة. وفي حالة المقاومة المنتظِمة، يكون حجم المقاومة هو حاصل ضرب طولها ومساحة مقطعها. إذن يكون لدينا:

$$N = n \times A \times L.$$

يُمكننا الآن كتابة الشحنة التي تمرُّ عبر نقطة في مقاومة خلال زمن ما على الصورة:

$$Q = neAL.$$

بقسمة طرفَيِ المعادلة على الزمن الذي تتحرَّك فيه الشحنة، نحصل على:

$$\frac{Q}{t} = \frac{neAL}{t}.$$

بإمكاننا ملاحظة أن:

$$\frac{L}{t} = v,$$

حيث v السرعة المتوسطة التي تتحرَّك بها الإلكترونات عبر المقاومة. وتُسمَّى v سرعة الانجراف للإلكترونات الحرَّة.

نعلم أن:

$$\frac{Q}{t} = I,$$

وبذلك نحصل على صيغة تربط بين شدَّة التيار المار في مقاومة والسرعة المتوسطة التي تتحرَّك بها الإلكترونات عبر المقاومة.

صيغة: شدَّة التيار بدلالة سرعة الانجراف للإلكترونات الحرَّة

إذا كان لدينا مقاومة مصنوعة من مادة كثافة الإلكترونات الحرَّة بها n، ومساحة مقطعها A، ويمرُّ بها تيار شدَّته I، فإن:

$$I = neAv,$$

حيث e شحنة الإلكترون، v سرعة الانجراف للإلكترونات الحرَّة في المقاومة.

لنلقِ نظرةً الآن على مثال نحدِّد فيه سرعة الانجراف.

مثال ٤: تحديد سرعة الانجراف للإلكترونات الحرَّة

يمرُّ تيار شدَّته $1.4\ \text{A}$ في سلك من النحاس بواسطة الإلكترونات الحرَّة. مساحة مقطع السلك تساوي $2.5 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$. أوجد السرعة المتوسطة التي تتحرَّك بها الإلكترونات الحرَّة خلال السلك. استخدِم القيمة $1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}$ لشحنة

الإلكترون، والقيمة $8.46 \times 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$ لكثافة الإلكترونات الحرَّة في النحاس. أوجد الإجابة بالصيغة العلمية، لأقرب منزلة عشرية.

الحل

الصيغة التي تربط شدَّة التيار المار في السلك بالسرعة المتوسطة للإلكترونات الحرَّة هي:

$$I = neAv،$$

حيث n كثافة الإلكترونات الحرَّة في النحاس، e شحنة الإلكترون، A مساحة مقطع السلك، v سرعة الانجراف للإلكترونات الحرَّة في السلك.

يُمكن أن نجعل سرعة الانجراف في طرف بمفردها، كما يأتي:

$$\frac{I}{neA} = \frac{neAv}{neA} = v.$$

بالتعويض بالقِيَم المُعطاة في السؤال، نحصل على:

$$v = \frac{1.4\ \mathrm{A}}{8.46 \times 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3} \times 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \times 2.5 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^{2}}$$
$$v = \frac{1.4\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}}{33\,840\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}}$$
$$v = \frac{1.4}{33\,840}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

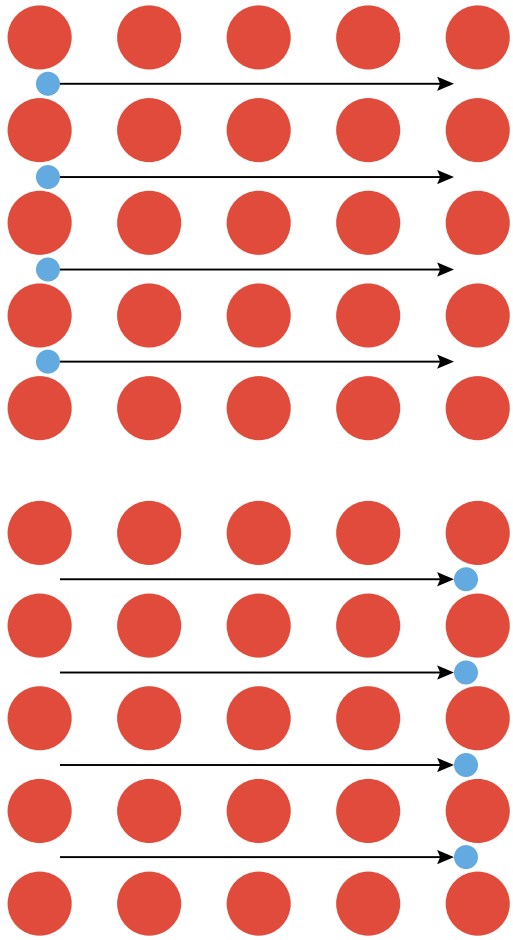
بالتقريب لأقرب منزلة عشرية، نحصل على:

$$4.1 \times 10^{-5}\ \mathrm{m/s}.$$

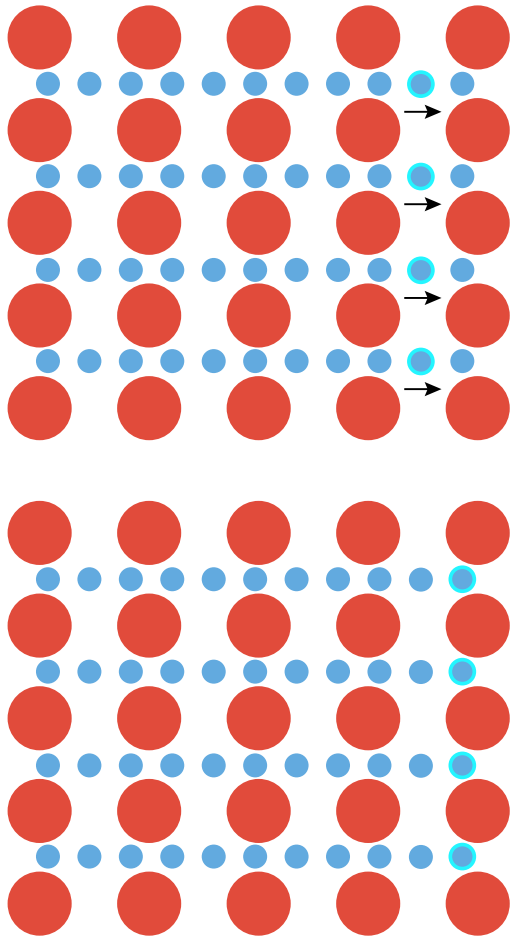
إن سرعة الانجراف للإلكترونات الحرَّة صغيرة للغاية.

عندما تُغلَق الدائرة الكهربية، يَصِل التيار لحظيًا إلى جميع أجزاء الدائرة تقريبًا. ولا يُمكن ملاحَظة التأخير بواسطة الحواسّ البشرية. وهو ما قد يجعلنا نفترض أن الإلكترونات الحرَّة يجب أن تتحرَّك في الدائرة خلال زمن مُهمَل.

يمثِّل الشكل الآتي فهمًا خطأ لحركة الإلكترونات الحرَّة عبر الدائرة الكهربية.



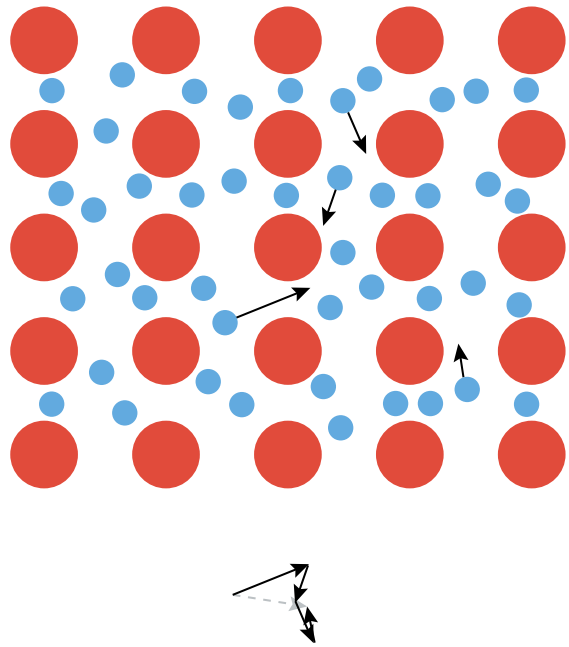
من المُهِمِّ ملاحَظة أنه في هذا النموذج الخطأ، تُوجَد الإلكترونات الحرَّة فقط عند نقطتَيْ بداية ونهاية الدائرة. لكنْ في الواقع، تُوجَد الإلكترونات الحرَّة في الدائرة بأكملها. كما هو موضَّح في الشكل الآتي.



يوضِّح الشكل أن الإلكترونات الحرَّة المُظلَّلة تتحرَّك أبطأ بكثير من مثيلاتها الموجودة في النموذج الخطأ، إلَّا أن هناك عددًا أكبر بكثير من الإلكترونات الحرَّة التي تتحرَّك.

لا تتحرَّك الإلكترونات الحرَّة في الموصِّل بالطريقة المنتظِمة الموضَّحة في الشكل السابق. فالحركة الموضَّحة في هذين الشكلين هي الحركة الكلية للإلكترونات، وليست حركة الإلكترونات المنفردة.

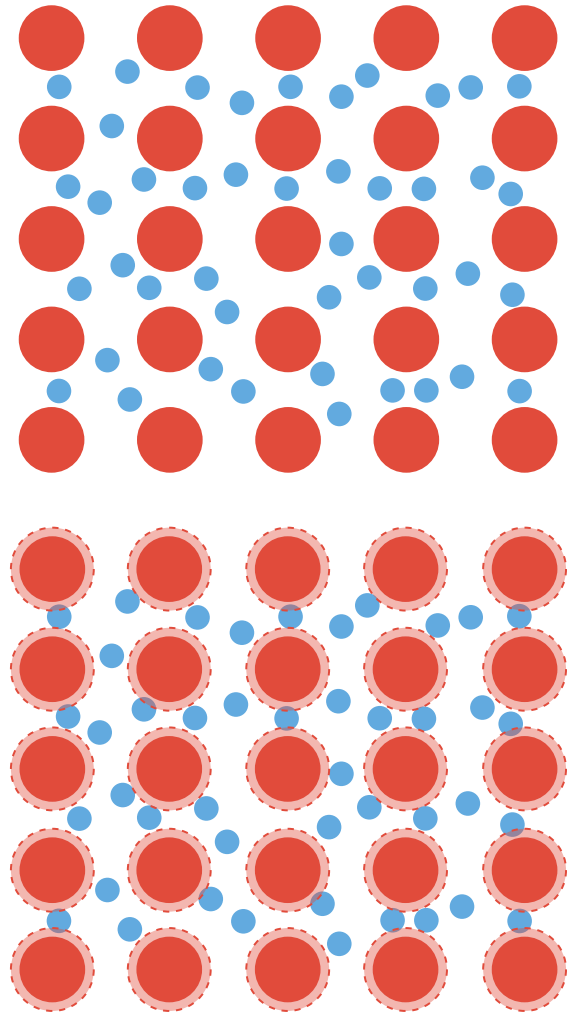
يمثِّل الشكل الآتي حركة الإلكترونات المنفردة على نحو أفضل. يوضِّح الشكل حركة أربعة إلكترونات منفردة فقط اختيرت عشوائيًا.



نلاحِظ أنه على الرغم من أن بعض الإلكترونات لها سرعة ذات مركّبة موجبة في اتجاه التيار، فإن السرعة الكلية لهذه الإلكترونات (التي يوضِّحها المتجه الرمادي المتقطِّع) لها مثل هذه المركّبة.

يُساعِدنا فهْم أن حركة الإلكترونات المنفردة تختلف بصورة ملحوظة عن اتجاه الحركة الكلية للإلكترونات في تفسير لماذا تزيد المقاومة النوعية بزيادة درجة الحرارة.

يمثِّل الشكل الآتي الموصِّل نفسه عند درجتَيْ حرارة مختلفتين.



درجة حرارة أعلى

عند درجة الحرارة الأعلى، يَميل الأيون في الموصِّل أن تكون له تغيُّرات أكبر في الإزاحة حول موضعه المتوسط من تلك التي له عند درجة الحرارة الأقلِّ. من ثَمَّ، يتَّسِع نطاق المواضع المحتملة للأيونات، كما هو موضَّح في الشكل.

وهذا يعني أن احتمالية حدوث التصادمات بين الأيونات والإلكترونات قد زادت. وكلما زاد عدد التصادمات بين الأيونات والإلكترونات، قلَّت شدَّة التيار في الموصِّل؛ ومن ثَمَّ زادت المقاومة النوعية للموصِّل.

هيَّا نلخِّص الآن ما تعلَّمناه في هذا الشارح.

النقاط الرئيسية

- تعتمد مقاومة الجسم على أبعاده ومقاومته النوعية التي تُعَدُّ إحدى خواصِّ المادة التي يتكوَّن منها الجسم.
- إذا كانت المقاومة R للجسم، ومساحة مقطعه A، وطوله L، فإن المقاومة النوعية ρ، تُعطَى بالصيغة:

$$\rho = \frac{RA}{L}.$$

- وحدة المقاومة النوعية هي أوم متر ($\Omega \cdot \mathrm{m}$).
- كلما زادت المقاومة النوعية للمادة، زادت الطاقة اللازمة لتمرير تيار في جسم مصنوع من هذه المادة.
- ترتبط المقاومة النوعية لأيِّ مادة بكثافة الإلكترونات الحرَّة في المادة.
- ترتبط المقاومة النوعية لأيِّ مادة بالسرعة المتوسطة التي تتحرَّك بها الإلكترونات الحرَّة عبر هذه المادة.
- تزداد المقاومة النوعية لمعظم المواد بزيادة درجة الحرارة.
- إذا كانت المقاومة مصنوعة من مادة كثافة الإلكترونات الحرَّة لها n، ومساحة مقطعها A، ويمرُّ بها تيار شدَّته I، فإن:

$$I = neAv،$$

حيث e شحنة الإلكترون، v سرعة الانجراف للإلكترونات الحرَّة في المقاومة.

- الزمن الذي يستغرقه إلكترون حرٌّ ليقطع طول الدائرة الكهربية أكبر بكثير من الزمن المُستغرَق لتمرير التيار في الدائرة.