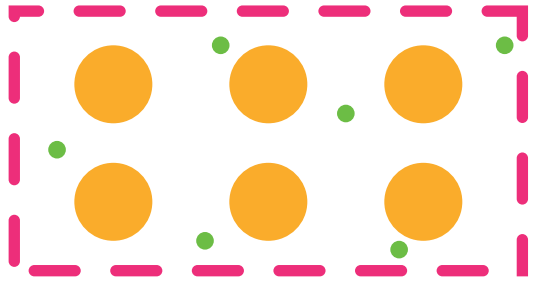
المقاومة والمقاومة النوعية للموصِّلات

$$R = \frac{\rho L}{A}$$



أهداف الدرس

ستتمكَّن من:

- استخدام المعادلة $R = \frac{\rho l}{A}$ لتحديد العلاقة بين المقاومة النوعية والأبعاد والمقاومة للموصل
- رسم مخطط لتمثيل التأثيرات الناتجة عن تغير طول موصل ومساحة مقطعه ومقاومته النوعية على مقاومته، وذلك من حيث حركة الإلكترونات الحرة
- رسم مخطَّط لتمثيل تأثيرات التغير في درجة حرارة المقاومات، وذلك من حيث حركة الإلكترونات الحرة
- استخدام المعادلة $I = nAv_d e$ لمعرفة العلاقة بين شدة التيار المارِّ في مقاومة وسرعة انجراف الإلكترونات الحرة في المقاومة

تذكير: التيار الكهربي

إذا كان هناك جسم تمر به شحنة Q، عبر نقطة على هذا الجسم في الزمن t، فإن شدة التيار I، في الجسم تُعطَى بالصيغة:

$$I = \frac{Q}{t}.$$

تتوقف شدة التيار في جسم ما على فرق الجهد عبر الجسم ومقاومة الجسم.

تذكير: المقاومة

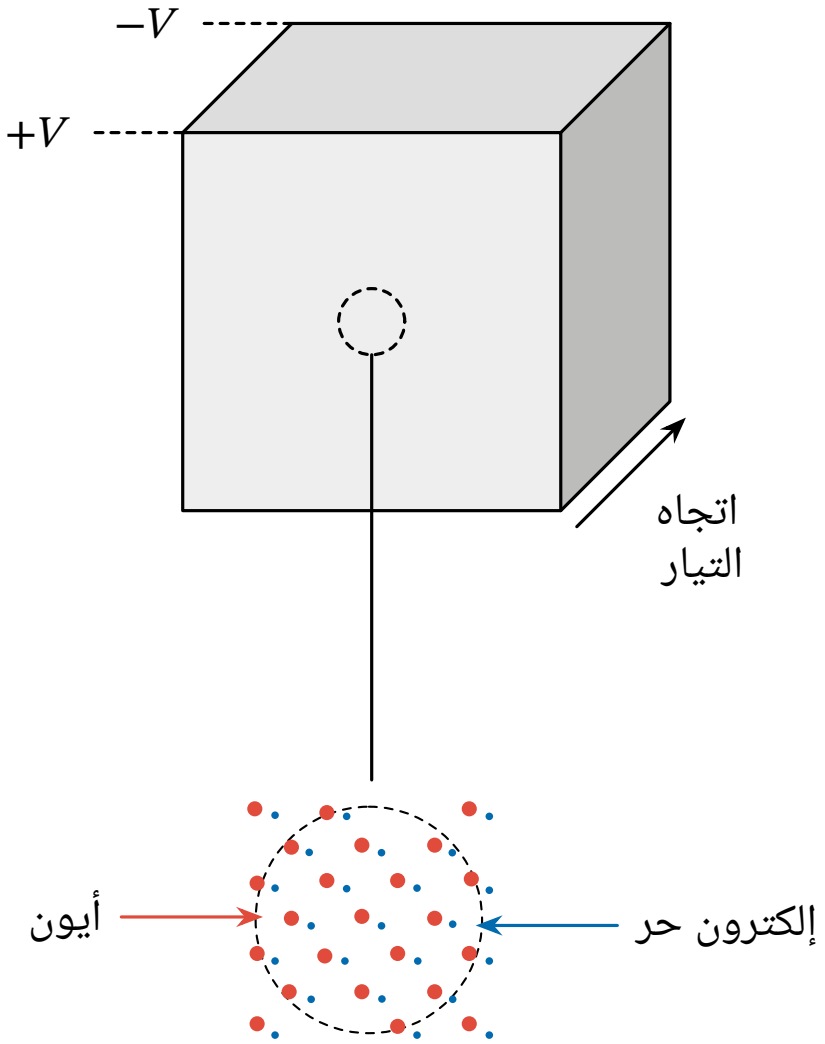
إذا طُبِّق فرق الجهد V، على جسم، ومرَّ به تيار شدَّته I، فإن المقاومة R تُعطَى بالصيغة:

$$R = \frac{V}{I}.$$

تُعَدُّ المقاومة إحدى خواصِّ الجسم. وتعتمد مقاومة الجسم على عاملين:

- أبعاد الجسم.
- المقاومة النوعية ρ، وهي إحدى خواص المادة التي يتكون منها الجسم.

حركة الإلكترونات الحرة عبر المقاومة



تُصنَع المقاومة من فلز موصِّل للكهرباء، يتكوَّن من شبكة من الذرات بها إلكترون واحد أو أكثر في مداراتها الخارجية، وترتبط هذه الإلكترونات ارتباطًا ضعيفًا للغاية بنواة الذرة، ويُمكن أن تنتقل من ذرة إلى أخرى بواسطة قوة كهربية صغيرة.

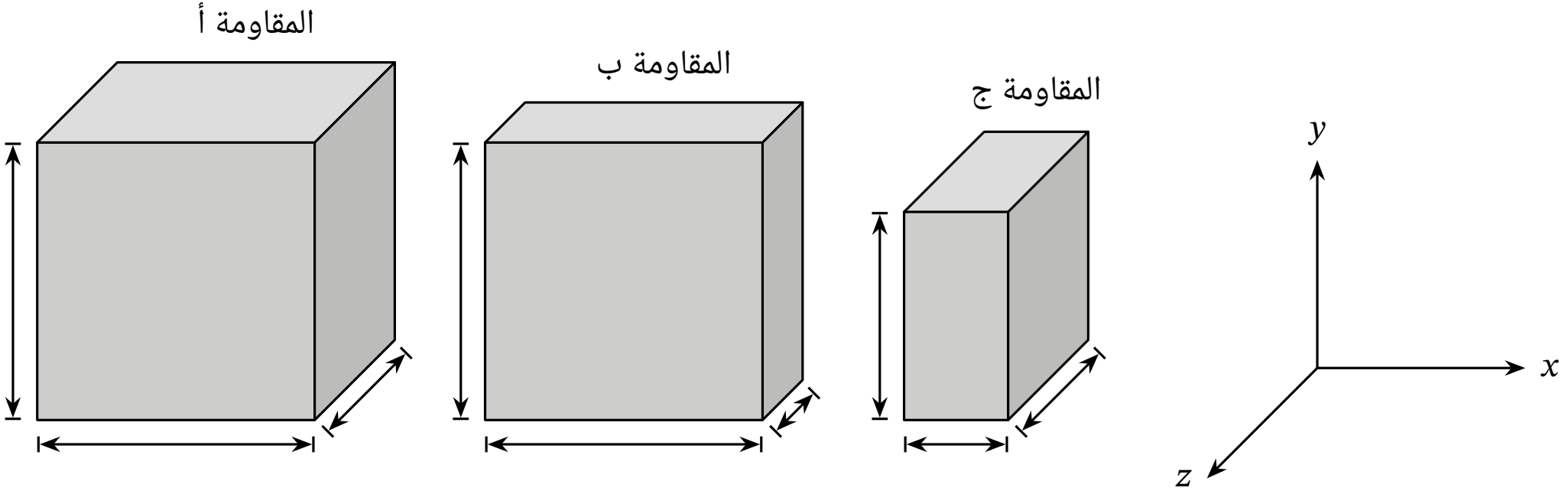
يُمكن تمثيل المقاومة بأنها تتكوَّن من أيونات موجبة الشحنة، وإلكترونات حرَّة تتحرَّك بين هذه الأيونات. ويُمكن تمثيل الإلكترونات الحرَّة بأنها تتحرَّك بطريقة تُشبِه حركة جزيئات الغاز.

كلما زادت مساحة مقطع المقاومة، زاد عدد الإلكترونات الحرة التي يمكن أن تشغل هذه المساحة.

تأثير أبعاد الجسم على مقاومته

يؤثِّر طول المقاومة ومساحة مقطعها في كيفية تحرُّك الإلكترونات الحرَّة عبر المقاومة. لفهم ذلك من المُفيد أن نطَّلِع على نموذج للبنية الداخلية للمقاومة.

تمثِّل مساحة وجه المقاومات في المستوى xy مساحة المقطع لكلِّ مقاومة.



المقاومتان أ، ب لهما مساحة المقطع نفسها، وهي أكبر من مساحة مقطع المقاومة ج.

المقاومتان أ، ج لهما الطول نفسه في اتجاه z، وهو أكبر من طول المقاومة ب.

تأثير أبعاد الجسم على مقاومته (متابعة)

بوضع العلاقة بين مساحة مقطع المقاومة وعدد الإلكترونات الحرة التي تُسهِم في شدة التيار في المقاومة في الاعتبار، يمكننا التعبير عن الصيغة:

$$I = \frac{Q}{t}$$

بالصورة:

$$I \propto A \times \frac{1}{t},$$

حيث A مساحة مقطع المقاومة.

يُمكن حساب الزمن t، الذي يستغرقه إلكترون حرٌّ؛ لكي يقطع طول المقاومة من الصيغة:

$$t = \frac{L}{v},$$

حيث v السرعة المتوسطة للإلكترونات الحرَّة، L طول المقاومة.

يمكننا التعويض بالتعبير الخاص بـ t في المعادلة:

$$I \propto A \times \frac{1}{t},$$

تأثير أبعاد الجسم على مقاومته (متابعة)

ليعطينا:

$$I \propto A \times \frac{v}{L}$$

$$I \propto \frac{Av}{L}.$$

لقد رأينا أن:

$$R = \frac{V}{I}.$$

بالنسبة إلى فرق الجهد الثابت، يُمكن القول إن:

$$R \propto \frac{1}{I}.$$

يمكننا التعويض في هذا بالتعبير:

$$I \propto \frac{Av}{L}.$$

تأثير أبعاد الجسم على مقاومته (متابعة)

ليعطينا:

$$R \propto \frac{L}{Av}.$$

يمكن كتابة التعبير:

$$R \propto \frac{L}{Av}.$$

في صورة تفصل الكميات التي تناظِر أبعاد المقاومة كما يأتي:

$$R \propto \frac{1}{v} \times \frac{L}{A}.$$

نلاحِظ هنا أن أبعاد المقاومة تؤثِّر في قيمة المقاومة كما يأتي:

- تتناسب قيمة المقاومة طرديًّا مع طول المقاومة.
- تتناسب قيمة المقاومة عكسيًّا مع مساحة مقطع المقاومة.

تأثير المقاومة النوعية للمادة على مقاومة الجسم

في المعادلة:

$$R \propto \frac{1}{v} \times \frac{L}{A},$$

L وA فقط يناظران بُعدي المقاومة.

الحد $\frac{1}{v}$ في المعادلة يتعلق بالمقاومة النوعية ρ، للمادة المصنوعة منها المقاومة.

إذن نجد أن:

$$\rho \propto \frac{1}{v}.$$

كلما زادت المقاومة النوعية للمادة، تحرَّكت الإلكترونات الحرَّة أبطأ في هذه المادة.

يُمكن التعبير عن المقاومة بدلالة المقاومة النوعية، كما يأتي:

$$R = \frac{\rho L}{A}.$$

تأثير المقاومة النوعية للمادة على مقاومة الجسم (متابعة)

تعتمد المقاومة النوعية لأيِّ مادة على كميتين:

- معدَّل حركة الإلكترونات الحرَّة في المادة.
- كثافة الإلكترونات الحرَّة في المادة.

يُمكننا أن نلاحِظ من هنا أن معدَّل حركة الإلكترونات الحرَّة في مادة ما، وكثافة الإلكترونات الحرَّة في هذه المادة، يعتمد كلٌّ منهما على الآخَر.

تعريف المقاومة النوعية

الصيغة:

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

يمكن إعادة ترتيبها لجعْل المقاومة النوعية في طرف بمفردها، كما يأتي:

$$R \times \frac{A}{L} = \frac{\rho L}{A} \times \frac{A}{L}$$

يُمكن الحصول على وحدة النظام الدولي للكمية:

$$\frac{A}{L}$$

كالآتي:

$$\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}} = \mathrm{m};$$

إذن وحدة المقاومة النوعية في النظام الدولي للوحدات هي:

$$\Omega \cdot \mathrm{m}.$$

وبالكلمات: أوم · متر.

مثال ١: تحديد المقاومة النوعية للمادة

سلك مصنوع من مادة مجهولة مقاومته $125\,\text{m}\Omega$. طول السلك $1.8\,\text{m}$، ومساحة مقطعه $2.35 \times 10^{-5}\,\text{m}^2$. ما المقاومة النوعية للمادة المصنوع منها السلك؟ أوجد الإجابة بالصيغة العلمية، لأقرب منزلة عشرية.

الحل

يُمكن إيجاد المقاومة النوعية ρ، من الصيغة:

$$\rho = \frac{RA}{L},$$

حيث R مقاومة السلك، A مساحة المقطع للسلك، L طول السلك.

أولًا: نعوِّض بالقيم المُعطاة في السؤال. $$\rho = \frac{125 \times 10^{-3}\,\Omega \times 2.35 \times 10^{-5}\,\text{m}^2}{1.8\,\text{m}}$$

بعد ذلك نبسِّط البسط. $$\rho = \frac{2.9375 \times 10^{-6}\,\Omega \cdot \text{m}^2}{1.8\,\text{m}}$$

بالتقريب لأقرب منزلة عشرية، نحصل على $1.6 \times 10^{-6}\,\Omega \cdot \text{m}$.

مثال ٢: تحديد أبعاد مقاومة معلومة مقاومتها النوعية

سلك نحاسي مقاومته $12.8\,\text{m}\Omega$، ومساحة مقطعه $1.15 \times 10^{-5}\,\text{m}^2$. أوجد طول السلك. استخدِم القيمة $1.7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$ للمقاومة النوعية للنحاس. أوجد الإجابة لأقرب منزلة عشرية.

الحل

يُمكن إيجاد المقاومة النوعية ρ ، للمادة من الصيغة:

$$\rho = \frac{RA}{L},$$

حيث R مقاومة السلك، A مساحة مقطع السلك، L طول السلك.

يُمكن إعادة ترتيب هذه الصيغة لجعل L في طرف بمفرده، كما يأتي:

$$\rho \times L = \frac{RA}{L} \times L$$
$$\rho \times L = RA$$
$$\frac{RA}{\rho} = L.$$

مثال ٢ (متابعة)

بالتعويض بالقيم المعطاة في:

$$\frac{RA}{\rho} = L$$

نحصل على:

$$L = \frac{12.8 \times 10^{-3}\,\Omega \times 1.15 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^2}{1.7 \times 10^{-8}\,\Omega \cdot \mathrm{m}}$$

$$L = \frac{0.128\,\Omega \times 1.15 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^2}{1.7 \times 10^{-8}\,\Omega \cdot \mathrm{m}}$$

$$L = \frac{1.472 \times 10^{-7}\,\Omega \cdot \mathrm{m}^2}{1.7 \times 10^{-8}\,\Omega \cdot \mathrm{m}}$$

$$L = \frac{1.472 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}}{1.7 \times 10^{-8}}.$$

بالتقريب لأقرب منزلة عشرية، نحصل على $8.7\,\mathrm{m}$.

مثال ٣: تحديد أبعاد مقاومة معلومة مقاومتها النوعية

سلك نحاسي مقاومته $22\,\text{m}\Omega$، وطوله $6.2\,\text{m}$. أوجد مساحة مقطعه. استخدِم $1.7 \times 10^{-8}\,\Omega \cdot \text{m}$ للمقاومة النوعية للنحاس. أوجد الإجابة بالصيغة العلمية، لأقرب منزلة عشرية.

الحل

يُمكن إيجاد المقاومة النوعية ρ، للمادة من الصيغة:

$$\rho = \frac{RA}{L},$$

حيث R مقاومة السلك، A مساحة مقطع السلك، L طول السلك.

يُمكن إعادة ترتيب هذه الصيغة ليصبح A في طرف بمفرده، كما يأتي:

$$\rho \times L = \frac{RA}{L} \times L$$
$$\rho \times L = RA$$
$$\rho \times \frac{L}{R} = A.$$

مثال ٣ (متابعة)

بالتعويض بالقيم المعلومة في:

$$A = \rho \times \frac{L}{R},$$

نحصل على:

$$A = \frac{1.7 \times 10^{-8}\,\Omega \cdot \mathrm{m} \times 6.2\,\mathrm{m}}{22 \times 10^{-3}\,\Omega}$$
$$A = \frac{1.7 \times 10^{-8}\,\Omega \cdot \mathrm{m} \times 6.2\,\mathrm{m}}{2.2 \times 10^{-2}\,\Omega}$$
$$A = \frac{1.054 \times 10^{-7}\,\Omega \cdot \mathrm{m}^2}{2.2 \times 10^{-2}\,\Omega}.$$

بالتقريب لأقرب منزلة عشرية، نحصل على $4.8 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$.

سرعة الانجراف للإلكترون

مثلما تناولنا العلاقة بين قيمة المقاومة، والمقاومة النوعية لمادة المقاومة، وأبعاد المقاومة، يمكننا تناول العلاقة بين هذه الكميات وسرعة تحرك الإلكترونات الحرة الحاملة للشحنة عبر المقاومة.

بما أن:

$$Q = It,$$

يُمكن إيجاد الشحنة التي تمرُّ عبر نقطة في مقاومة خلال زمن ما من الصيغة:

$$Q = e \times N,$$

حيث e شحنة الإلكترون، N عدد الإلكترونات التي تمرُّ بهذه النقطة.

تعتمد قيمة N على كثافة الإلكترونات الحرَّة n في المادة، وحجم المقاومة المصنوعة من هذه المادة. وفي حالة المقاومة المنتظمة يكون حجم المقاومة هو حاصل ضرب طولها ومساحة مقطعها. إذن يكون لدينا:

$$N = n \times A \times L.$$

سرعة الانجراف للإلكترون (متابعة)

يُمكننا الآن كتابة الشحنة التي تمرُّ عبر نقطة في مقاومة خلال زمن ما على الصورة:

$$Q = neAL.$$

بقسمة طرفَيِ المعادلة على الزمن الذي تتحرَّك فيه الشحنة، نحصل على:

$$\frac{Q}{t} = \frac{neAL}{t}.$$

بإمكاننا ملاحَظة أن:

$$\frac{L}{t} = v,$$

حيث v السرعة المتوسطة التي تتحرَّك بها الإلكترونات عبر المقاومة. وتُسمَّى v سرعة الانجراف للإلكترونات الحرة.

سرعة الانجراف للإلكترون (متابعة)

إذا كان لدينا مقاومة مصنوعة من مادة كثافة الإلكترونات الحرَّة بها n، ومساحة مقطعها A، ويمرُّ بها تيار شدَّته I، فإن:

$$I = neAv,$$

حيث e شحنة الإلكترون، v سرعة الانجراف للإلكترونات الحرَّة في المقاومة.

لنلقِ نظرةً الآن على مثال نحدِّد فيه سرعة الانجراف.

مثال ٤: تحديد سرعة الانجراف للإلكترونات الحرَّة

يمرُّ تيار شدَّته $1.4\,\text{A}$ في سلك من النحاس بواسطة الإلكترونات الحرَّة. مساحة مقطع السلك تساوي $2.5 \times 10^{-6}\,\text{m}^2$.

أوجد السرعة المتوسطة التي تتحرَّك بها الإلكترونات الحرَّة خلال السلك. استخدِم القيمة $1.6 \times 10^{-19}\,\text{C}$ لشحنة الإلكترون، والقيمة $8.46 \times 10^{28}\,\text{m}^{-3}$ لكثافة الإلكترونات الحرَّة في النحاس. أوجد الإجابة بالصيغة العلمية، لأقرب منزلة عشرية.

الحل

الصيغة التي تربط شدَّة التيار المار في السلك بالسرعة المتوسطة للإلكترونات الحرَّة هي:

$$I = neAv,$$

حيث e شحنة الإلكترون، v سرعة الانجراف للإلكترونات الحرَّة في السلك.

يُمكن أن نجعل سرعة الانجراف في طرف بمفردها، كما يأتي:

$$\frac{I}{neA} = \frac{neAv}{neA}$$
$$\frac{neAv}{neA} = v$$
$$\frac{I}{neA} = v.$$

مثال ٤ (متابعة)

بالتعويض بالقيم المعلومة في:

$$v = \frac{I}{neA},$$

نحصل على:

$$v = 1.4 \times 8.46 \times 10^{28}\,\text{m}^{-3} \times 1.6 \times 10^{-19}\,\text{C} \times 2.5 \times 10^{-6}\,\text{m}^2$$

$$v = \frac{1.4\,\text{C/s}}{33\,840\,\text{C/m}}$$

$$v = \frac{1.4\,\text{m}}{33\,840\,\text{s}}.$$

بالتقريب لأقرب منزلة عشرية، نحصل على $4.1 \times 10^{-5}\,\text{m/s}$.

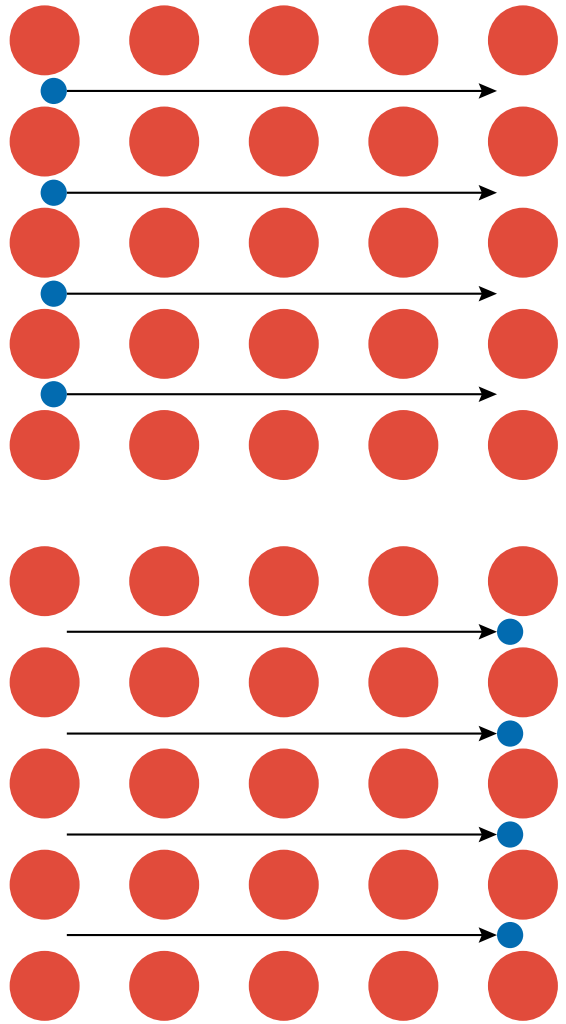
سرعة الانجراف للإلكترون (متابعة)

إن سرعة الانجراف للإلكترونات الحرَّة صغيرة للغاية.

عندما تُغلَق الدائرة الكهربية، يَصِل التيار لحظيًّا إلى جميع أجزاء الدائرة تقريبًا. ولا يُمكن ملاحَظة التأخير بواسطة الحواسّ البشرية. وهو ما قد يجعلنا نفترض أن الإلكترونات الحرَّة يجب أن تتحرَّك في الدائرة خلال زمن مُهمَل.

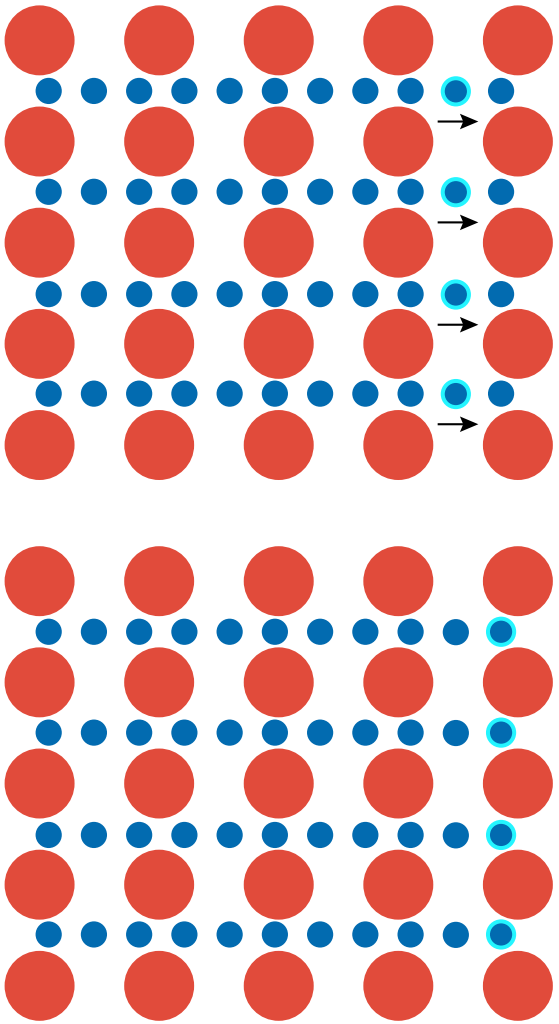
في الواقع يجب أن تمر الإلكترونات الحرة بنقطة واحدة، وليس عبر طول الدائرة. هذا لأن الإلكترونات الحرة توجد في الدائرة بأكملها.

سرعة الانجراف للإلكترون (متابعة)



المسافة التي تقطعها الإلكترونات الحرة في وحدة زمنية كبيرة.

تمثيل خطأ لحركة الإلكترونات الحرة في مقاومة.

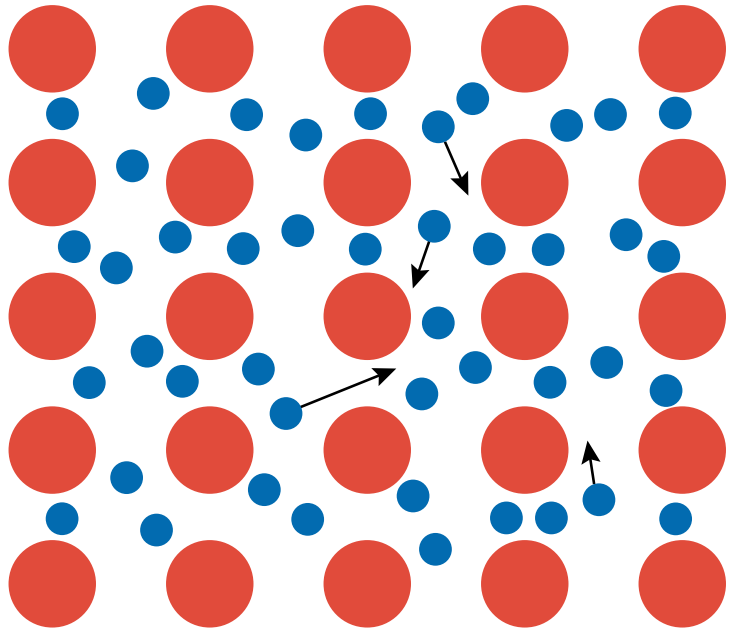


المسافة التي تقطعها الإلكترونات الحرة في وحدة زمنية صغيرة.

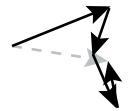
تمثيل صحيح لحركة الإلكترونات الحرة في مقاومة.

سرعة الانجراف للإلكترون (متابعة)

لا تتحرَّك الإلكترونات الحرَّة في موصِّل بطريقة منتظِمة بالفعل. يمثِّل الشكل الآتي حركة الإلكترونات المنفردة على نحو أفضل. يوضِّح الشكل حركة أربعة إلكترونات منفردة فقط اختيرت عشوائيًّا.



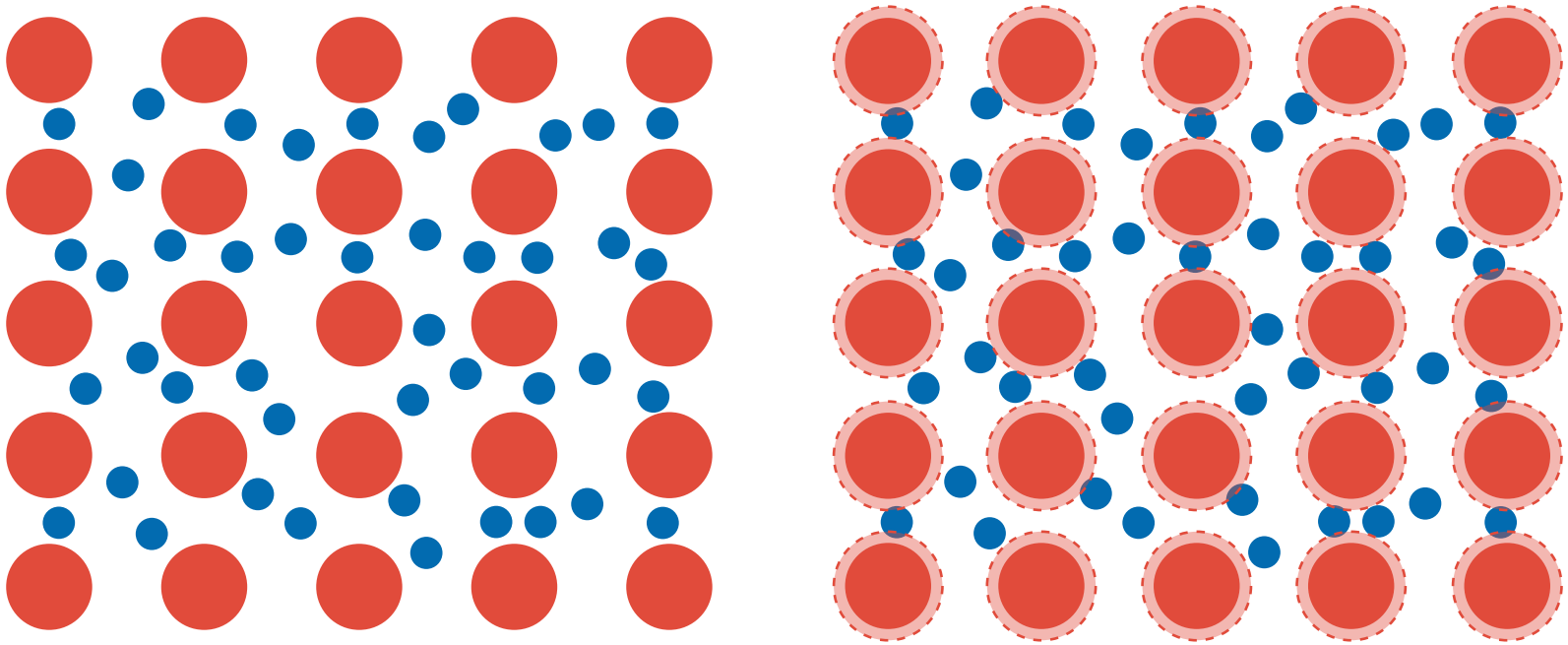
نلاحِظ أنه على الرغم من أن بعض الإلكترونات لها سرعة ذات مركِّبة موجبة في اتجاه التيار، فإن السرعة الكلية لهذه الإلكترونات (التي يوضِّحها المتجه الرمادي المتقطِّع) لها مثل هذه المركِّبة.



تأثير الحرارة على المقاومة النوعية

تتفاوت المقاومة النوعية للمادة تبعًا لدرجة الحرارة. وبالنسبة إلى معظم المواد تزداد المقاومة النوعية بزيادة درجة الحرارة.

يزداد معدل التصادمات بين الأيونات والإلكترونات الحرة بزيادة درجة الحرارة، مما يقلل حركة الإلكترونات الحرة عبر الموصل.



درجة حرارة أعلى

تأثير الحرارة على المقاومة النوعية (متابعة)

عند درجة الحرارة الأعلى، يَميل الأيون في الموصِّل إلى أن تكون له تغيُّرات أكبر في الإزاحة حول موضعه المتوسط من تلك التي له عند درجة الحرارة الأقلِّ. من ثَمَّ يتَّسِع نطاق المواضع المحتملة للأيونات، كما هو موضَّح في الشكل.

وهذا يعني أن احتمالية حدوث التصادمات بين الأيونات والإلكترونات قد زادت.

وكلما زاد عدد التصادمات بين الأيونات والإلكترونات، قلَّت شدَّة التيار في الموصِّل؛ ومن ثَمَّ زادت المقاومة النوعية للموصِّل.

النقاط الرئيسية

- تعتمد مقاومة الجسم على أبعاده ومقاومته النوعية التي تُعَدُّ إحدى خواصِّ المادة التي يتكوَّن منها الجسم.
- إذا كانت المقاومة R للجسم، ومساحة مقطعه A، وطوله L، فإن المقاومة النوعية ρ، تُعطَى بالصيغة:

$$\rho = \frac{RA}{L}.$$

- وحدة المقاومة النوعية هي أوم · متر $(\Omega \cdot \mathrm{m})$.
- كلما زادت المقاومة النوعية للمادة، زادت الطاقة اللازمة لتمرير تيار في جسم مصنوع من هذه المادة.
- ترتبط المقاومة النوعية لأيِّ مادة بكثافة الإلكترونات الحرَّة في المادة.
- ترتبط المقاومة النوعية لأيِّ مادة بالسرعة المتوسطة التي تتحرَّك بها الإلكترونات الحرَّة عبر هذه المادة.
- تزداد المقاومة النوعية لمعظم المواد بزيادة درجة الحرارة.
- إذا كانت المقاومة مصنوعة من مادة كثافة الإلكترونات الحرَّة لها n، ومساحة مقطعها A، ويمرُّ بها تيار شدَّته I، فإن:

$$I = neAv,$$

حيث e شحنة الإلكترون، v سرعة الانجراف للإلكترونات الحرَّة في المقاومة.

- الزمن الذي يستغرقه إلكترون حرٌّ ليقطع طول الدائرة الكهربية أكبر بكثير من الزمن المُستغرَق لتمرير التيار في الدائرة.