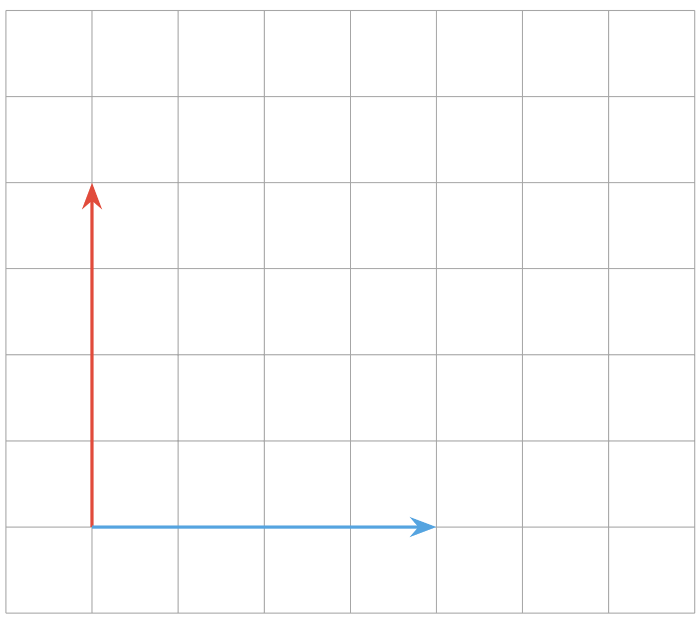
شارح: جمع المتجهات

في هذا الشارح، سوف نتعلَّم كيف نجمع متجهين فأكثر في بُعدَين، باستخدام كلٍّ من الطريقتين البيانية والجبرية.

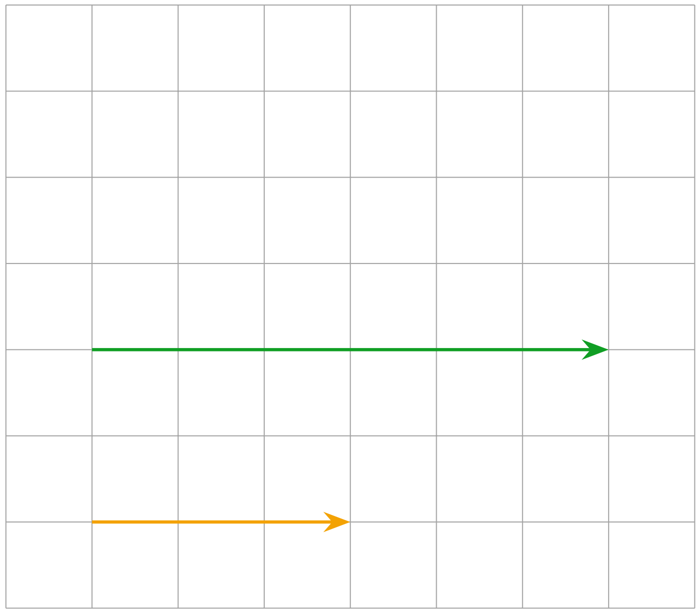
تذكَّر أن **المتجه** هو كمية لها مقدار واتجاه.

توضِّح الشبكة البيانية التالية متجهين مُمثَّلين بسهمين:



يُمثِّل طولُ كلِّ سهم مقدارَ كلِّ متجه. السهمان الموضَّحان على الشكل لهما الطول نفسه وهو طول 4 أضلاع من مربعات الشبكة، وهو ما يعني أن المتجهين لهما المقدار نفسه. لكنَّهما يشيران في اتجاهين مختلفين. يشير المتجه الأزرق في اتجاه المحور x، في حين يشير المتجه الأحمر في اتجاه المحور y.

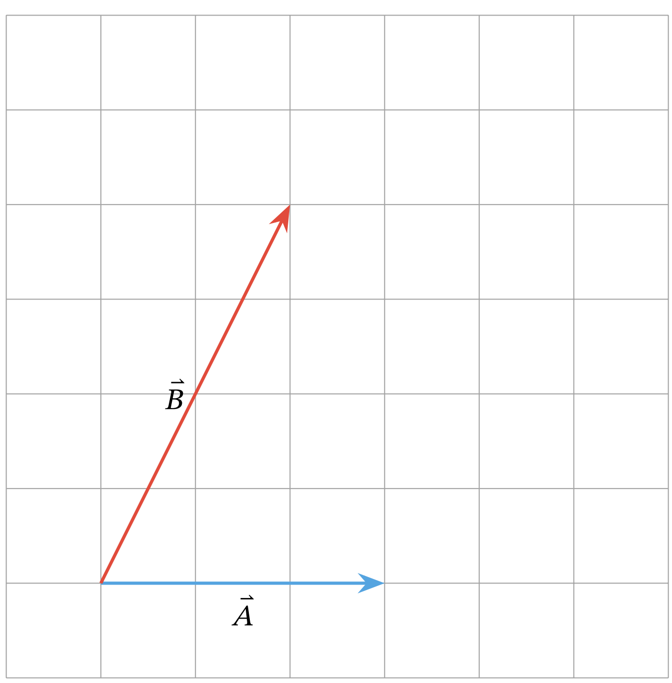
توضِّح الشبكة البيانية التالية متجهين مختلفين:



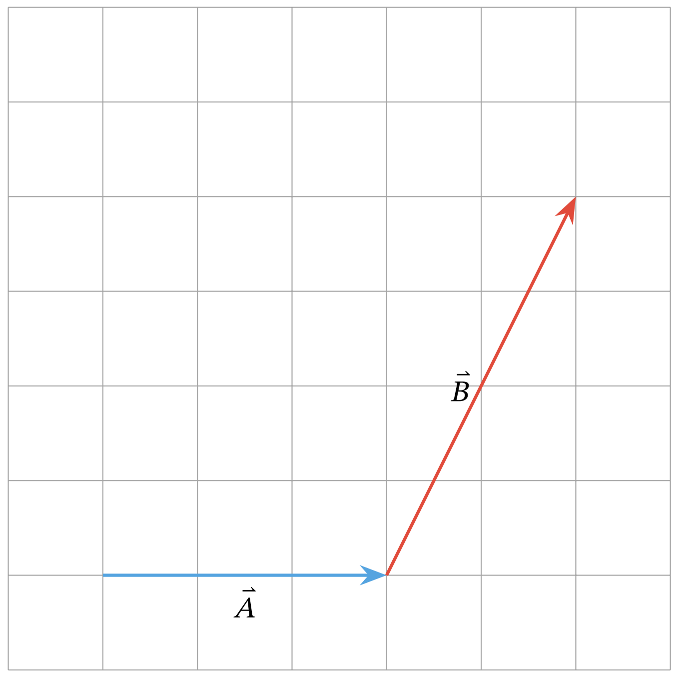
يشير كلٌّ من المتجه الأخضر والمتجه البرتقالي في الاتجاه نفسه، لكنَّ لكلٍّ منهما طولًا مختلفًا. طول المتجه البرتقالي يساوي طول 3 أضلاع من مربعات الشبكة البيانية، في حين أن طول المتجه الأخضر يساوي طول 6 أضلاع.

في هذا الشارح، سنرمز إلى المتجه بنصف سهم فوقه، على سبيل المثال: $\vec{A}$. ولكن في مصادر أخرى قد تجد رموزًا مختلفة للمتجهات، على سبيل المثال، يُرمَز إلى المتجهات بخطٍّ عريض: $\mathbf{A}$.

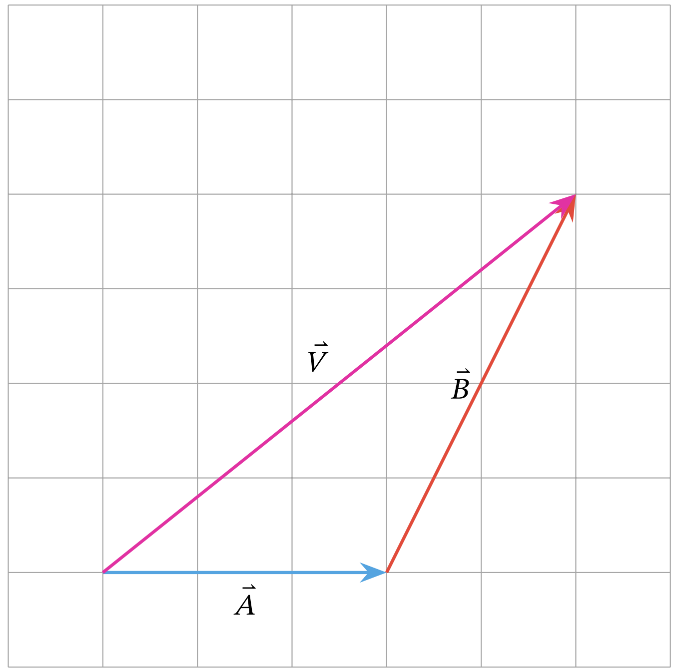
والآن انظر إلى المتجهين المرسومين على الشبكة البيانية التالية:



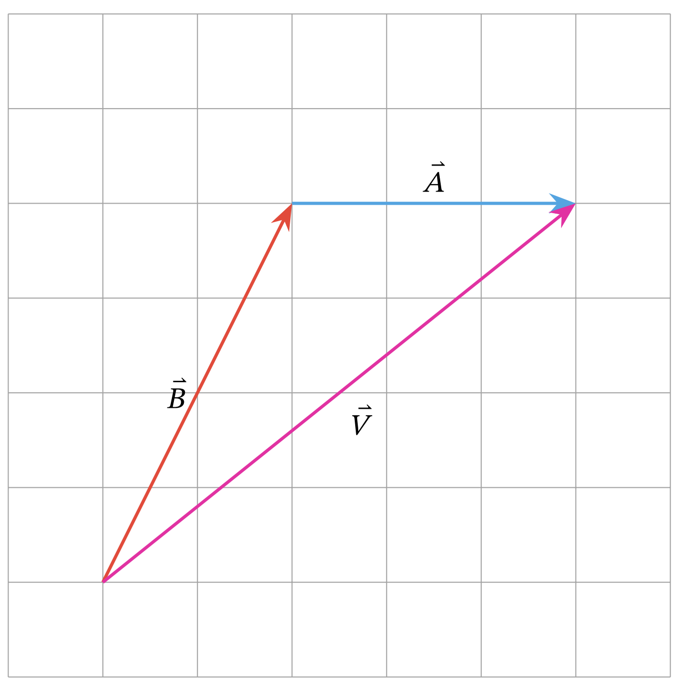
ما حاصل جمع المتجهين $\vec{A}$ و$\vec{B}$؟ يمكننا معرفة ذلك باستخدام الشكل فقط. تخيَّل نقل المتجه $\vec{B}$؛ بحيث يقع «ذيل» السهم (الطرف بدون رأس سهم) عند النقطة نفسها التي يقع عليها «رأس» السهم (الطرف ذو رأس سهم) الذي يمثِّل المتجه $\vec{A}$ على الشبكة التربيعية. وهو ما يوضِّحه الشكل التالي:



لاحظ أن طول المتجه $\vec{B}$ واتجاهه لم يتغيَّرا. فهو ببساطة قد انتقل على الشبكة البيانية فقط. والآن، يصبح حاصل جمع المتجهين هو المتجه $\vec{V}$، الذي يبدأ من «ذيل» المتجه $\vec{A}$ إلى «رأس» المتجه $\vec{B}$، كما يوضِّح السهم الأرجواني في الشكل التالي:

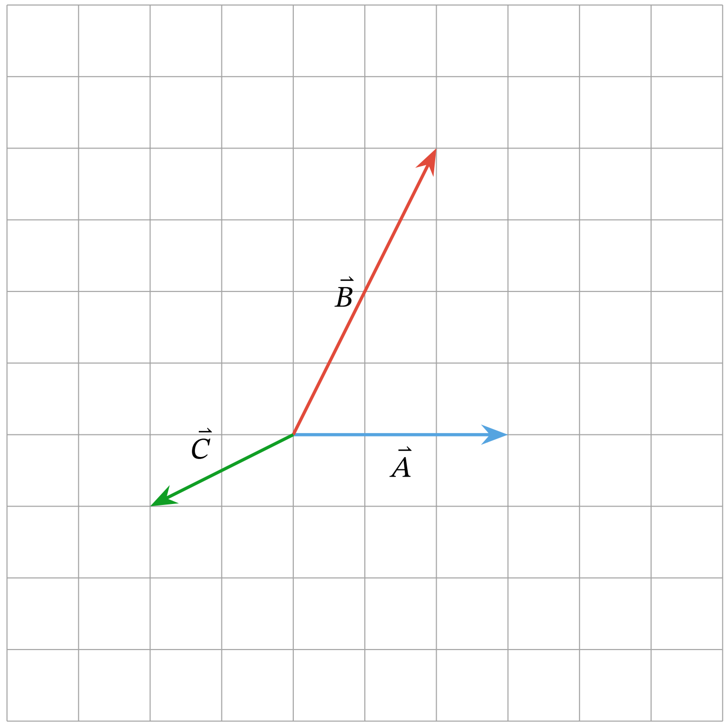


كان باستطاعتنا أيضًا القيام بذلك بطريقة عكسية. حيث يمكننا نقل ذيل المتجه $\vec{A}$ إلى رأس المتجه $\vec{B}$، وكنّا سنحصل أيضًا على النتيجة نفسها كما هو موضَّح بالأسفل:

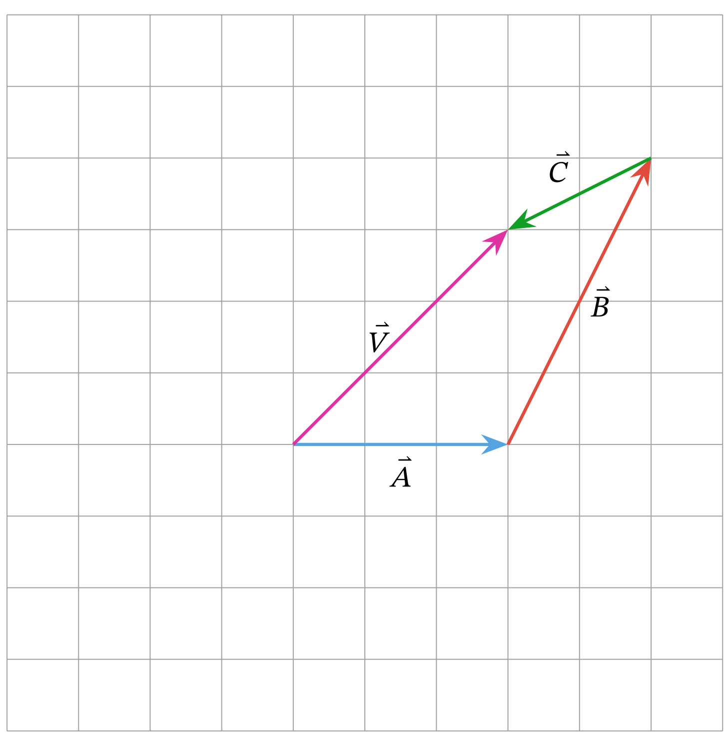


عند جمع متجهين باستخدام هذه الطريقة، لا يهمُّ الترتيب الذي نجمعهما به، ما دمنا سنوصل رأس كلِّ متجه بذيل الآخَر، دون تغيير طول أيٍّ من المتجهين أو اتجاهه.

يمكننا أيضًا استخدام هذه الطريقة لجمع أكثر من متجهين. يوضِّح الشكل التالي ثلاثة متجهات على شبكة مربعة:



يمكننا إيجاد حاصل جمع المتجهات الثلاثة، $\vec{V}$، بتوصيل رأس كلٍّ متجه بذيل المتجه الآخَر، كما هو موضَّح أدناه:

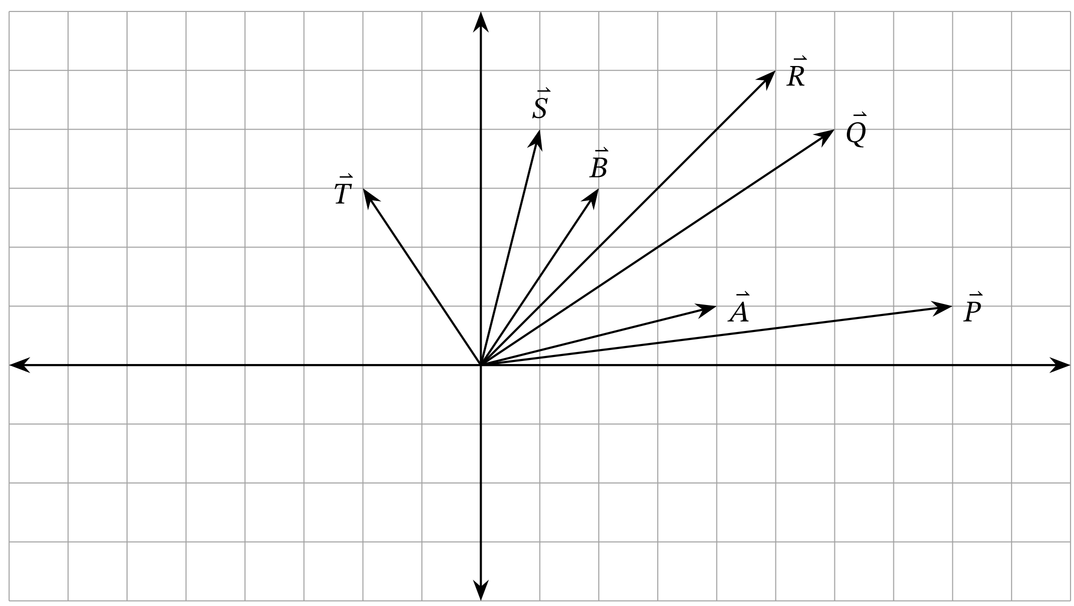


متجه المحصِّلة، $\vec{V}$، دائمًا ما يبدأ من ذيل المتجه الأول وينتهي عند رأس المتجه الأخير. ويمكن استخدام هذه الطريقة لجمع أيِّ عدد من المتجهات.

هيا نلقِ نظرة على بعض الأمثلة.

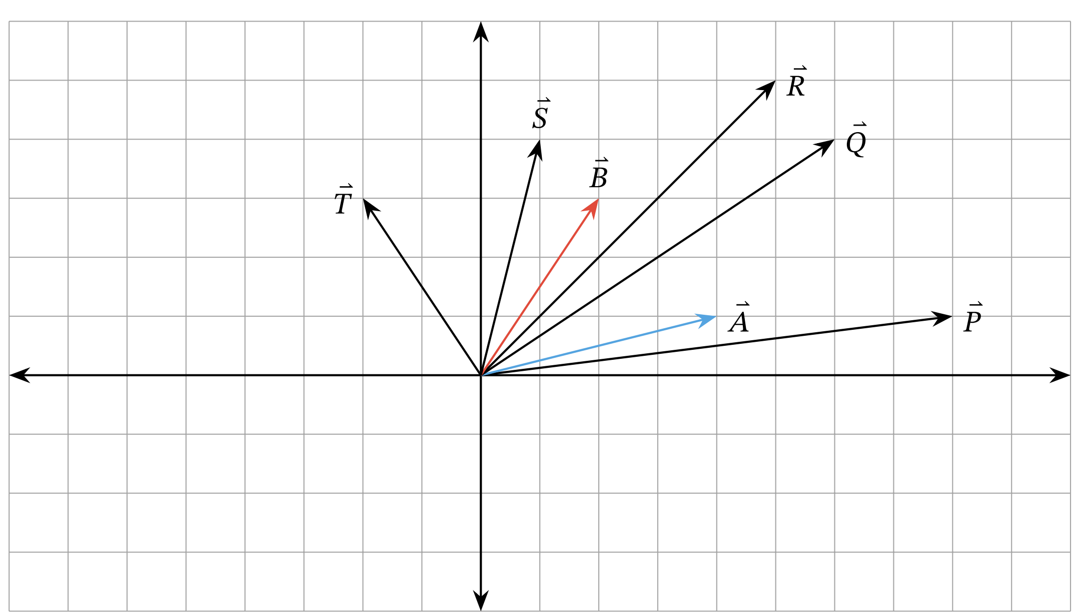
مثال ١: جمع متجهين بيانيًّا

أيٌّ المتجهات: $\vec{P}$، أو $\vec{Q}$، أو $\vec{R}$، أو $\vec{S}$، أو $\vec{T}$؛ الموضَّحة في الشكل يساوي $\vec{A} + \vec{B}$؟

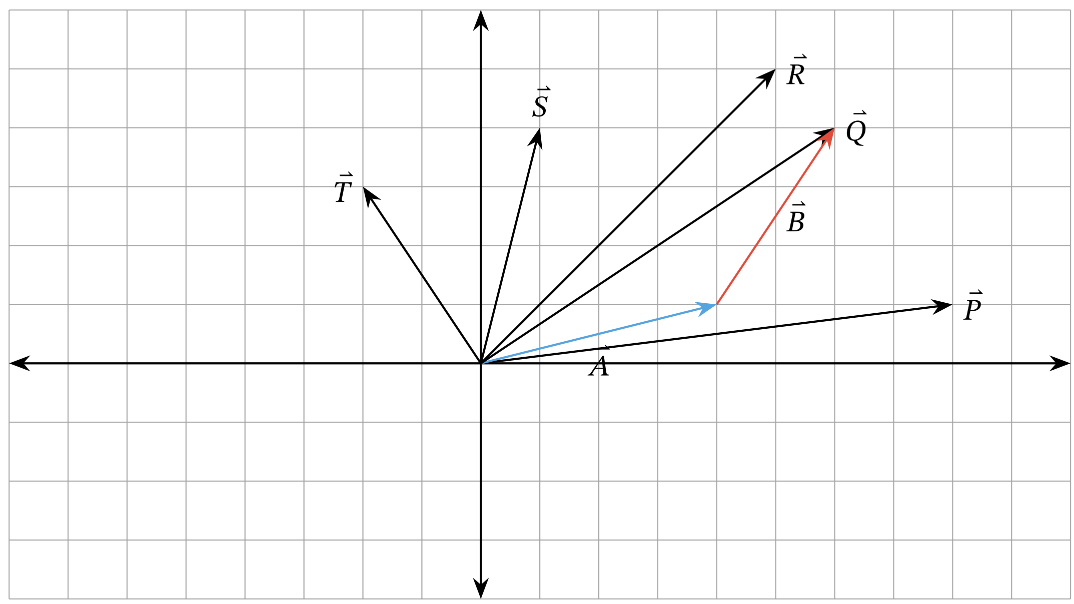


الحل

لنبدأ بإعادة رسم الشكل، مع تمييز المتجهين $\vec{A}$ و$\vec{B}$ وترك باقي المتجهات كما هي.



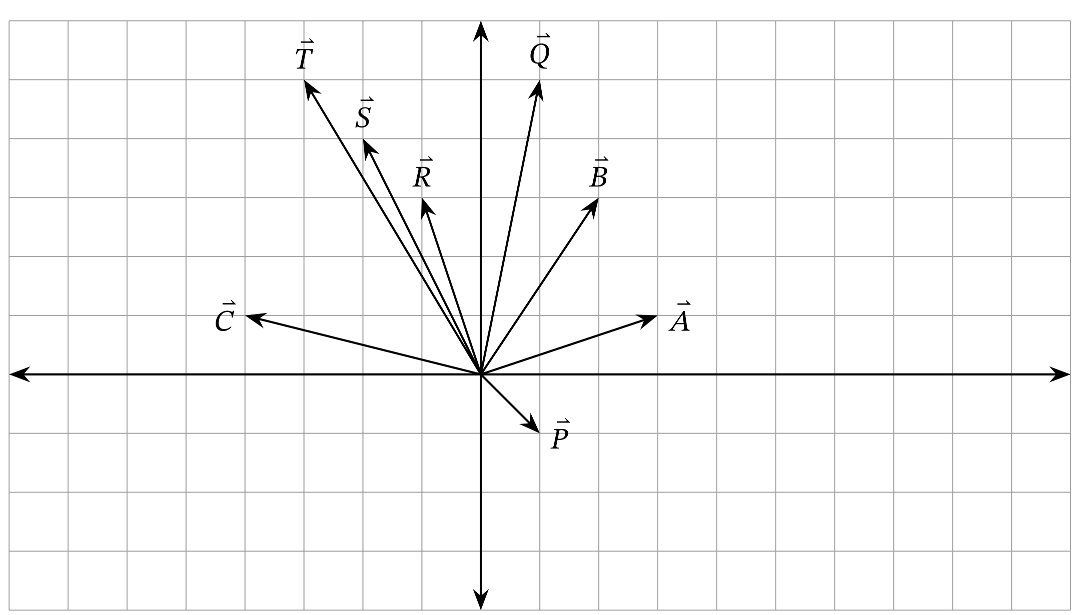
يمكننا إيجاد حاصل جمع المتجهين $\vec{A}$ و$\vec{B}$ بيانيًا عن طريق نقل المتجه $\vec{B}$؛ بحيث يقع «ذيل» السهم عند «رأس» السهم الذي يُمثِّل المتجه $\vec{A}$. ويوضِّح هذا الشكلُ التالي:



إذن متجه المحصِّلة هو المتجه الذي يبدأ من ذيل المتجه $\vec{A}$ وينتهي عند رأس المتجه $\vec{B}$، وهو المتجه $\vec{Q}$.

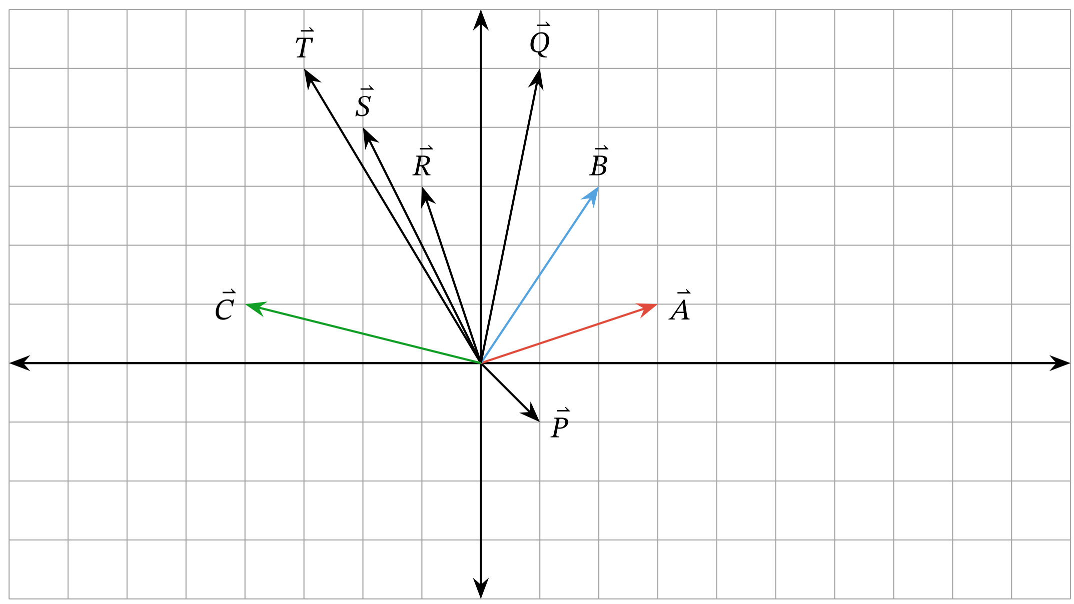
مثال ٢: جمع ثلاثة متجهات بيانيًا

أيُّ المتجهات: $\vec{P}$، أو $\vec{Q}$، أو $\vec{R}$، أو $\vec{S}$، أو $\vec{T}$؛ الموضَّحة في الشكل يساوي $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$؟

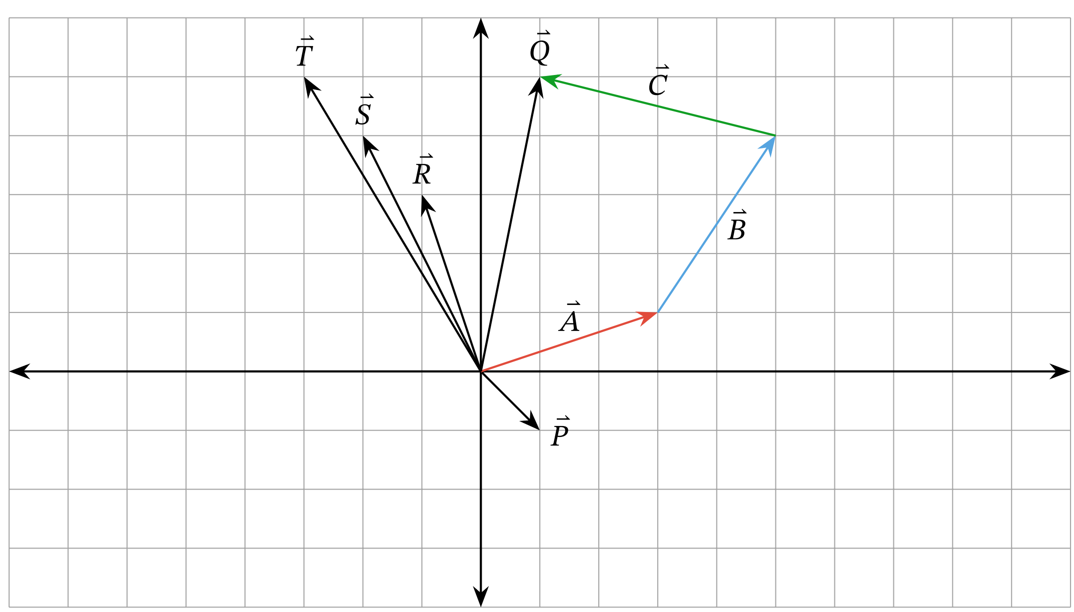


الحل

لنبدأ بإعادة رسم الشكل، مع تمييز المتجهات $\vec{A}$ و$\vec{B}$ و$\vec{C}$ وترك باقي المتجهات كما هي.

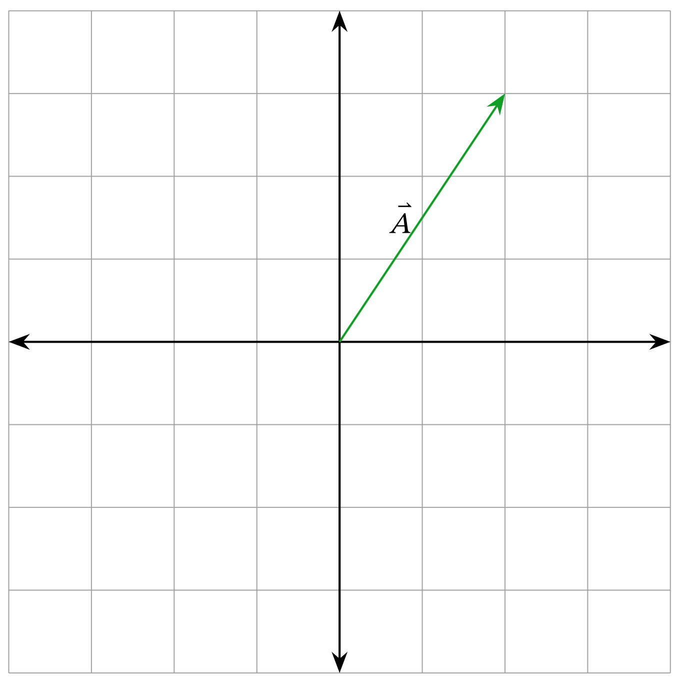


يمكننا إيجاد حاصل جمع المتجهات $\vec{A}$ و$\vec{B}$ و$\vec{C}$ بيانيًّا عن طريق نقل المتجهين $\vec{B}$ و$\vec{C}$؛ بحيث يقع «ذيل» كلٍّ سهم عند «رأس» السهم السابق. ويوضِّح هذا الشكلُ التالي:



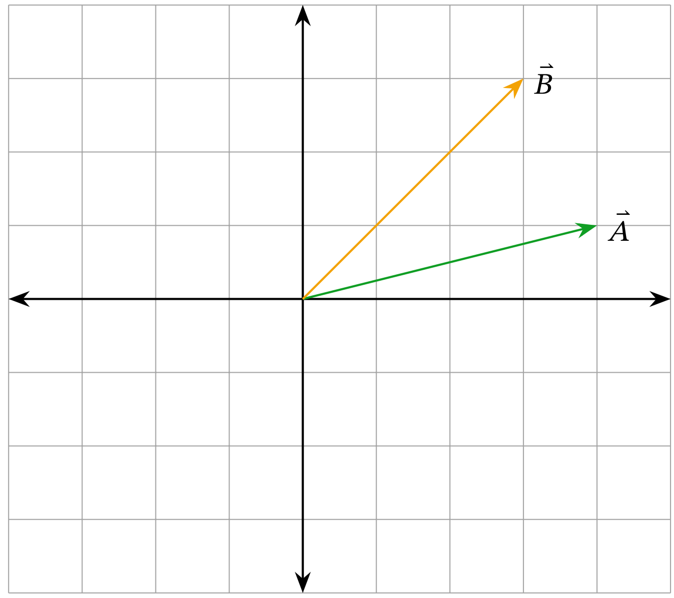
متجه المحصِّلة هو المتجه الذي يبدأ من ذيل المتجه $\vec{A}$ وينتهي عند رأس المتجه $\vec{C}$، وهو المتجه $\vec{Q}$.

تذكَّر أنه يمكننا أيضًا تمثيل المتجهات جبريًّا. في الشكل التالي، يمكن كتابة المتجه $\vec{A}$ على الصورة: $2\vec{i} + 3\vec{j}$؛ حيث $\vec{i}$ و$\vec{j}$ هما **متجهًا وحدة**. متجه الوحدة هو متجه طوله 1، ويشير في اتجاه أحد المحورين. متجه الوحدة $\vec{i}$ يشير في اتجاه المحور x، ومتجه الوحدة $\vec{j}$ يشير في اتجاه المحور y. طول المركِّبة الأفقية للمتجه $\vec{A}$ يساوي طول ضلعَي مربعين من مربعات الشبكة، ومن ثَمَّ يمكن وصف مركِّبته الأفقية على الصورة: $2\vec{i}$، أو «2 في متجه الوحدة باتجاه المحور x». وطول المركِّبة الرأسية للمتجه $\vec{A}$ يساوي طول 3 أضلاع من مربعات الشبكة، ومن ثَمَّ يمكن وصف مركِّبته الرأسية على الصورة: $3\vec{j}$، أو «3 في متجه الوحدة باتجاه المحور y»، ولذا يكون المتجه $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.



إذا عرفنا المركِّبات الأفقية والرأسية لمتجهين أو أكثر، يمكننا إيجاد حاصل جمع تلك المتجهات جبريًّا.

يوضِّح الشكل التالي متجهين:



نلاحظ من الشكل أن طول المتجه $\vec{A}$ يساوي طول 4 أضلاع من مربعات الشبكة في الاتجاه x، وطول ضلع مربع واحد من الشبكة في الاتجاه y. أما المتجه $\vec{B}$ فطوله يساوي طول 3 أضلاع من مربعات الشبكة في الاتجاه x، وطول 3 أضلاع من مربعات الشبكة في الاتجاه y. ويمكننا كتابة ذلك على الصورة:

$$\vec{A} = 4\vec{i} + 1\vec{j},$$
$$\vec{B} = 3\vec{i} + 3\vec{j}.$$

ولكي نوجد $\vec{A} + \vec{B}$، نجمع مركِّبتَي x معًا، ومركِّبتَي y معًا؛ وهو ما يعطينا:

$$\vec{A} + \vec{B} = (4+3)\,\vec{i} + (1+3)\,\vec{j}$$
$$\vec{A} + \vec{B} = 7\vec{i} + 4\vec{j}.$$

لاحظ أنه إذا كانت إشارة إحدى المركِّبات سالبة، فعلينا أن نضع الإشارة في اعتبارنا عند جمع مركِّبتَي x وy. على سبيل المثال، إذا كان:

$$\vec{A} = 4\vec{i} - 2\vec{j},$$

فيجب أن نفكِّر في هذا على الصورة:

$$\vec{A} = 4\vec{i} + (-2)\,\vec{j}.$$

لذا؛ إذا جمعنا المتجهين:

$$\vec{A} = 4\vec{i} - 2\vec{j},$$
$$\vec{B} = 3\vec{i} + 3\vec{j},$$

فإنه بالنسبة لمركِّبتَي y سنجمع -2 و3، ونحصل على:

$$\vec{A} + \vec{B} = (4 + 3)\,\vec{i} + ((-2) + 3)\,\vec{j},$$
$$\vec{A} + \vec{B} = 7\vec{i} + 1\vec{j}.$$

هيا نلقِ نظرة على بعض الأمثلة التدريبية.

مثال ٣: جمع متجهين مُعطيَين على الصورة المركَّبة

لدينا المتجهان $\vec{A}$، $\vec{B}$؛ حيث: $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$، $\vec{B} = 7\vec{i} + 5\vec{j}$. احسب $\vec{A} + \vec{B}$.

الحل

لكي نوجد $\vec{A} + \vec{B}$ علينا جمع مركِّبتَي x للمتجهين معًا، ومركِّبتَي y للمتجهين معًا، ومن ثَمَّ:

$$\vec{A} + \vec{B} = (2 + 7)\,\vec{i} + (3 + 5)\,\vec{j},$$
$$\vec{A} + \vec{B} = 9\vec{i} + 8\vec{j}.$$

بهذا يكون لدينا حاصل جمع هذين المتجهين مكتوبًا على الصورة المركَّبة.

مثال ٤: جمع متجهين مُعطيَين على الصورة المركَّبة

لدينا المتجهان: $\vec{A}$ و$\vec{B}$. $\vec{A} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ و$\vec{B} = -4\vec{i} + 9\vec{j}$. احسب $\vec{A} + \vec{B}$.

الحل

لكي نوجد $\vec{A} + \vec{B}$ علينا جمع مركِّبتَي x للمتجهين معًا، ومركِّبتَي y للمتجهين معًا. وعلينا تذكُّر وضع الإشارة السالبة أمام الأعداد أثناء إجراء الحسابات. نحصل من ذلك على:

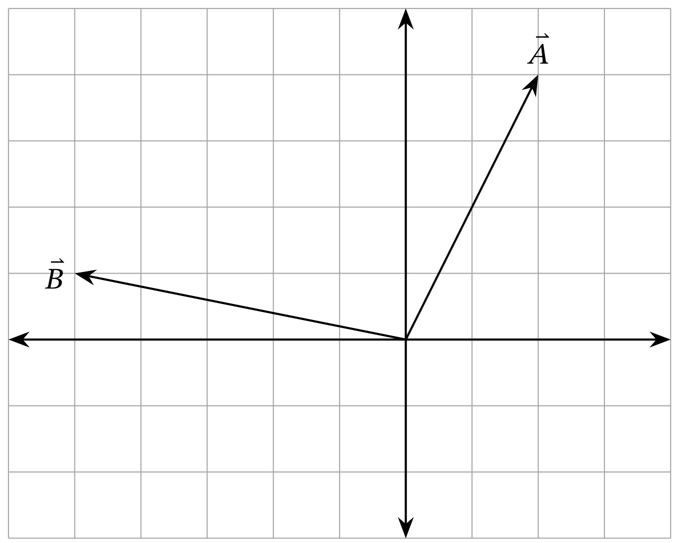
$$\vec{A} + \vec{B} = (3 + (-4))\,\vec{i} + ((-3) + 9)\,\vec{j}$$
$$\vec{A} + \vec{B} = -1\vec{i} + 6\vec{j}.$$

لدينا الآن حاصل جمع هذين المتجهين مكتوبًا على الصورة المركَّبة.

يمكننا أيضًا الربط بين جمع متجهين بيانيًا وجمعهما جبريًا، كما في المثال التالي.

مثال ٥: جمع متجهين ممثَّلين بيانيًّا وإيجاد الناتج على الصورة المركَّبة

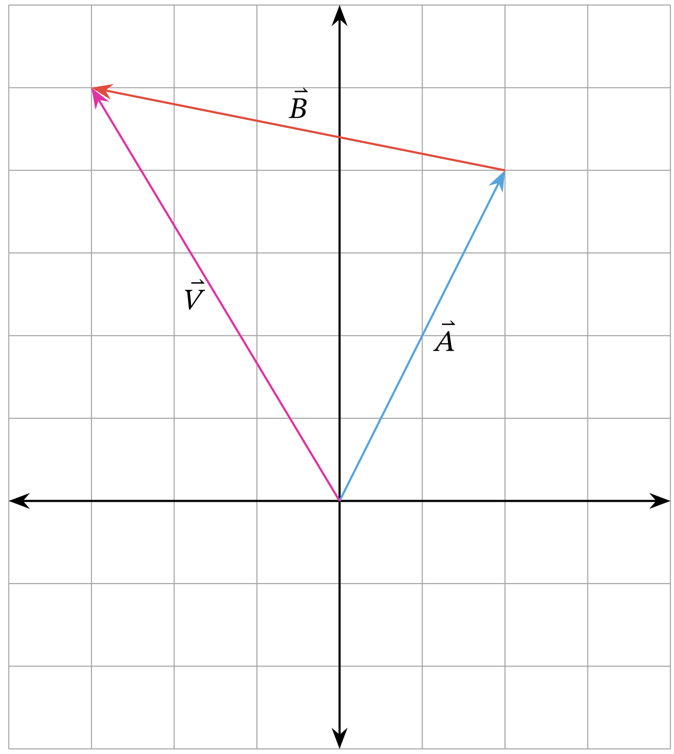
يوضِّح الشكل المتجهين: $\vec{A}$، $\vec{B}$. طول ضلع كلِّ مربع في شبكة الرسم يساوي 1. أوجد $\vec{A}+\vec{B}$ في الصورة المركَّبة.



الحل

ثمة طريقتان لحلِّ هذه المسألة.

تتمثَّل الطريقة الأولى في جمع المتجهين بيانيًّا، ثم إيجاد مركِّبات الناتج. يوضِّح الشكل التالي جمع المتجهين؛ حيث ننقل المتجه $\vec{B}$ بحيث يقع ذيله عند رأس المتجه $\vec{A}$. ويكون الناتج هو المتجه $\vec{V}$.



نرى من الشكل أن المتجه $\vec{V}$ مركِّبته الأفقية $-3\vec{i}$، ومركِّبته الرأسية $5\vec{j}$؛ إذن يمكن كتابته على الصورة: $\vec{V} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$. وهذه هي الإجابة.

والطريقة الثانية التي يمكننا من خلالها حلُّ السؤال تتمثَّل ببساطة في إيجاد مركِّبات المتجهين $\vec{A}$ و$\vec{B}$، ثم جمع مركِّبتَي x للمتجهين، ومركِّبتَي y للمتجهين. بالنظر إلى الشكل الأصلي، نلاحظ أن:

$$\vec{A} = 2\vec{i} + 4\vec{j},$$
$$\vec{B} = -5\vec{i} + 1\vec{j},$$

إذن:

$$\vec{A} + \vec{B} = (2 + (-5))\,\vec{i} + (4 + 1)\,\vec{j}$$
$$\vec{A} + \vec{B} = -3\vec{i} + 5\vec{j}.$$

كما تلاحظ، نحصل على النتيجة نفسها. سواء جمعنا المتجهين بيانيًّا أو جبريًّا، فإننا نُجري العملية نفسها عليهما.

النقاط الرئيسية

- يمكننا جمع متجهين أو أكثر بيانيًّا عن طريق توصيل «ذيل» كلِّ متجه بـ «رأس» المتجه الآخَر.
- يمكننا جمع متجهين أو أكثر جبريًّا عن طريق جمع مركِّبات x لكلِّ متجه، وجمع مركِّبات y لكلِّ متجه.

- جمع المتجهات بيانيًا وجمعها جبريًّا هما طريقتان مختلفتان لإجراء العملية نفسها على المتجهات.