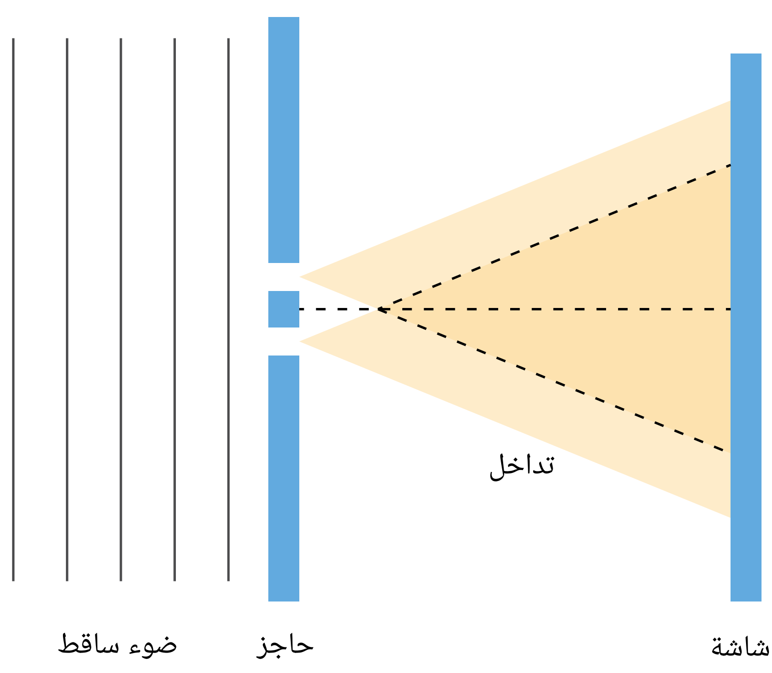
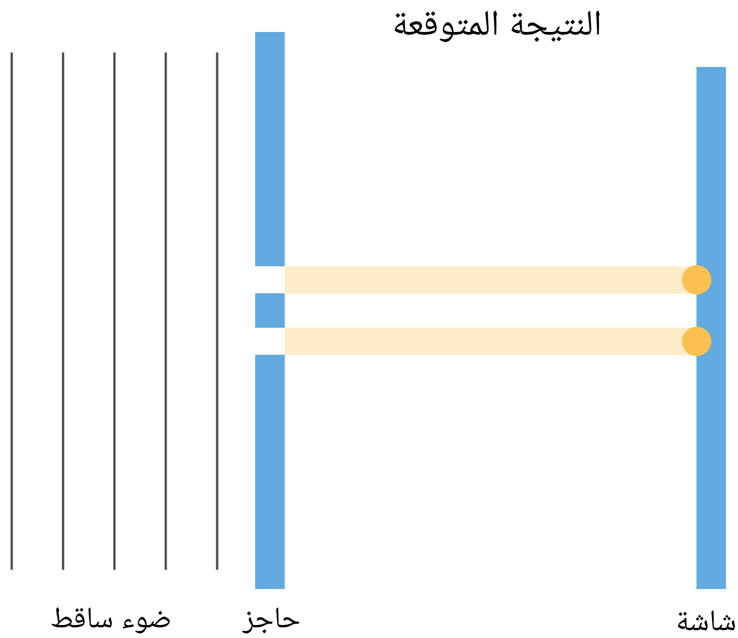
شارح: تداخل الشق المزدوج

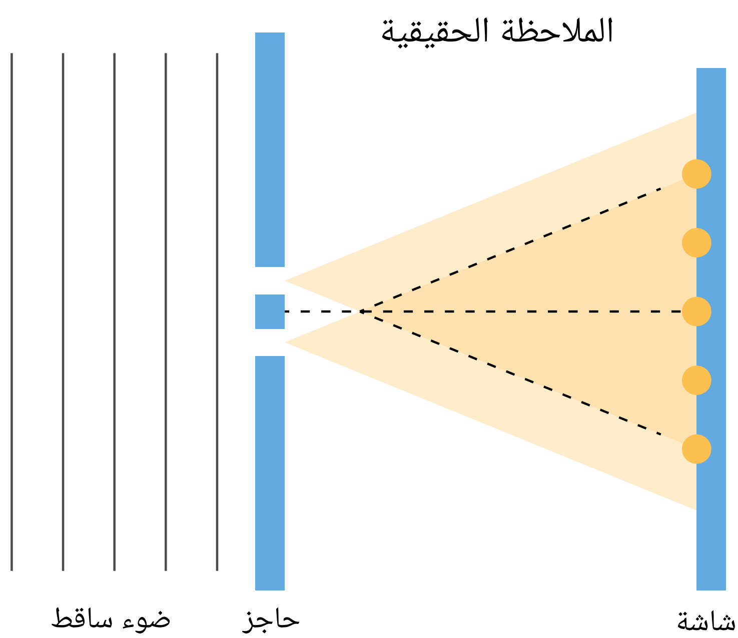
في هذا الشارح، سوف نتعلم كيف نحسب مواضع الهدب المضيئة والمظلمة في أنماط التداخل الناتجة عن الشقوق المزدوجة.

لكي نبدأ تجربتنا مع الضوء، نحتاج إلى شقين ضيقين متوازيين في حاجز. ونحتاج بعد ذلك إلى **ضوء مترابط** ليتحرك في اتجاه الشقين، والضوء المترابط موجات لها الطول الموجي نفسه وطور ثابت. ولرؤية ما يحدث للضوء عند مروره عبر الشقوق، وضعت شاشة على مسافة معينة من الجانب الآخر من الحاجز. وهذه التجهيزات موضَّحة في الشكل الآتي. من المهم أن نفهم كيفية تمثيل موجات الضوء هنا. فالخطوط التي تفصل بينها مسافات متساوية تُمثِّل منظورًا علويًّا للموجات. وتُمثِّل الخطوط الرمادية قمم الموجات وهي تنتقل من اليسار إلى اليمين عبر الصفحة باتجاه الشق المزدوج.



ما نتوقع ملاحظته هو منطقتان مضيئتان أمام الشقين مباشرة؛ لأن الحاجز يمنع الضوء من إنارة بقية الشاشة. لكن، ليس هذا ما نلاحظه. بدلًا من ذلك، توجد سلسلة من المناطق المضيئة على الشاشة بأكملها، وليس فقط اثنتين. فما الذي يحدث هنا إذن؟ ما يحدث هنا يوصف بكلمة واحدة، **التداخل**.

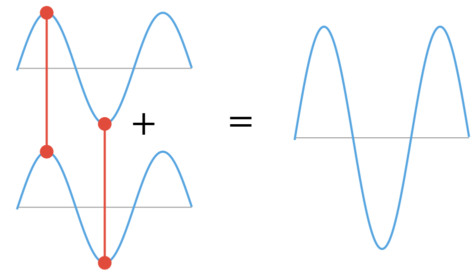




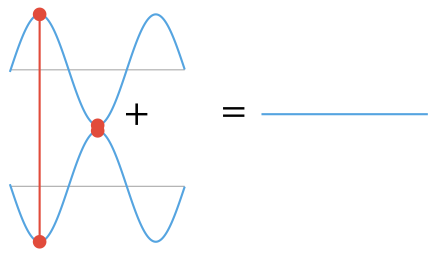
أولًا، انظر إلى أحد الشقين. إن موجات الضوء التي تمر عبْره **تحيد**. فالضوء يحيد عندما يمر بعائق مثل ركن أو شق كما في هذه الحالة. تذكر أن الحيود يحدث بالفعل عند كلا الشقين، فإذا انتشرت الموجات من كل منهما، فإنها تتراكب و**تتداخل** بعضها مع بعض. وهذا ما يؤدي إلى نمط المناطق المضيئة والمظلمة المُلاحَظة على الشاشة.

لكي نفهم لماذا يَنتج هذا النمط عن التداخل، علينا أن نفهم **مبدأ التراكب**. وهذا اسم معقد لفكرة بسيطة نسبيًا. ولشرح هذا المبدأ، علينا التحول عن المنظور العلوي لموجات الضوء الموضحة في الأشكال السابقة وتمثيل الموجة باعتبارها منحنى مرة أخرى.

تعريف: مبدأ التراكب



متفقتان في الطور



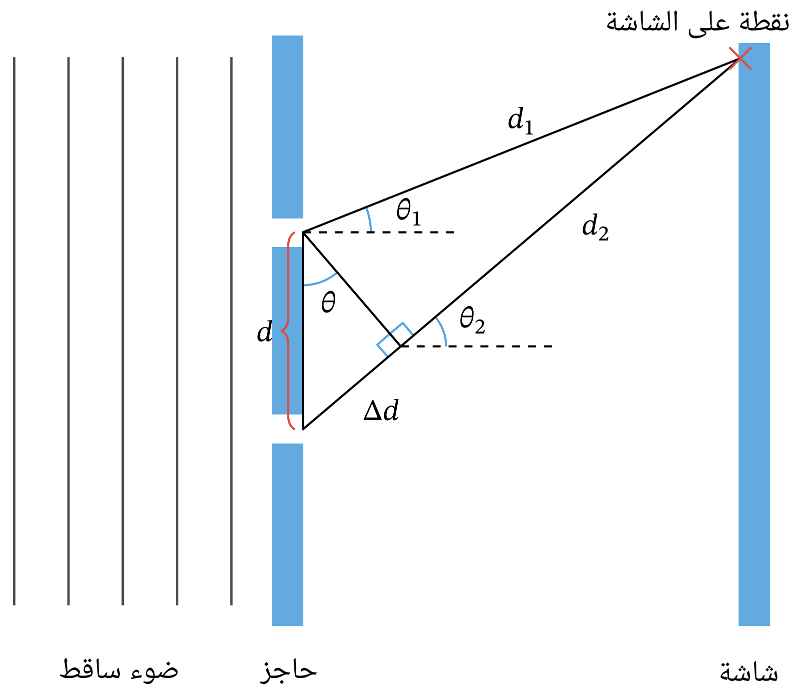
مختلفتان في الطور

بالنظر إلى الشكل بالأعلى، يُطلَق على موجتين أنهما **متفقتان في الطور** إذا كانتا متراكبتين بحيث تتحاذى قممهما وقيعانهما. ويخبرنا مبدأ التراكب أن الموجتين ستتداخلان تداخلًا **بنَّاءً**. ويمكن تصور الموجة الناتجة باعتبارها حاصل جمع القمم والقيعان، ممَّا يُنتِج موجة ذات سعة أكبر.

أما إذا كانت الموجتان **مختلفتين في الطور**، فستكون قمم إحدى الموجتين متحاذية مع قيعان الموجة الأخرى، ويخبرنا مبدأ التراكب أن الموجتين ستتداخلان تداخلًا **هدَّامًا**. ويمكن تصور ذلك باعتباره جمع للقمم والقيعان. وبما أن القيعان تقع تحت الأفقي، فإن الإزاحة **سالبة**. ولأننا نجمع عددًا سالبًا، فإننا في واقع الأمر **نطرح** القيعان من القمم ليس إلا. وهذا يعني أن الموجتين ستُلغي كلٌّ منهما الأخرى.

بالعودة إلى تجربة الشق المزدوج، يخبرنا مبدأ التراكب أن المناطق المضيئة (أو مناطق الشدة العظمى) على الشاشة تُناظِر المناطق التي يتداخل فيها الضوء تداخلًا بنَّاءً، وأن المناطق المظلمة (أو مناطق الشدة الصغرى) تُناظِر المناطق التي يتداخل فيها الضوء تداخلًا هدَّامًا.

الخطوة التالية هي وصف هذا التداخل باستخدام المعادلات. وكما هو الحال مع العديد من مسائل الفيزياء، من الجيد البدء برسم شكل توضيحي. بالنظر إلى الشكل الآتي، نُركِّز على نقطة محددة على الشاشة، وعلى المسارين اللذين يقطعهما الضوء من الشقين إلى هذه النقطة.



نتعرف أولًا مفهوم فرق المسار.

تعريف: فرق المسار

إذا كان d_1 المسافة التي يقطعها الضوء القادم من الشق الأول، وd_2 المسافة التي يقطعها الضوء القادم من الشق الثاني، فإن فرق المسار يساوي القيمة المطلقة للفرق بين هذين العددين.

أو بالأحرى هو مقدار ما يتقدم به الضوء المار من أحد الشقين خلال انتقاله وصولًا إلى النقطة نفسها على الشاشة عن الضوء المار من الشق الآخر. ويُعبَّر عنه بالمعادلة:

$$|d_1 - d_2| = \Delta d.$$

بالنسبة لمنطقة مظلمة، فإن هذا الفرق هو ما يعني أن الموجات تصل مختلفة في الطور وتتداخل تداخلًا هدَّامًا. أما في المناطق المضيئة، فإن الموجات تصل متفقة في الطور وتتداخل تداخلًا بنَّاءً.

يمكننا تعريف d على أنه المسافة بين مركزي الشقين. ويمكننا بعد ذلك رسم مثلث قائم باستخدام d، θ، Δd كما هو موضح في الشكل. تذكر أن Δd يُمثِّل فرق المسار بين طولي المستقيمين؛ ومن ثَمَّ يناظر قاعدة المثلث. وهذه خطوة مهمة، فبإمكاننا الآن استخدام حساب المثلثات للحصول على معادلة.

باعتبار d الوتر، نعرِف أن:

$$d \sin \theta = \Delta d.$$

والآن، علينا أن نذكر افتراضًا هامًا، وهو أن المسارين اللذين يقطعهما الضوء متوازيان. وعلينا وضع هذا الافتراض حتى نتمكن من تكوين مثلث قائم للحصول على المعادلة. من الواضح أن المستقيمين غير متوازيين لأنهما يلتقيان عند النقطة على الشاشة حيث يحدث التداخل. يلزم لهذا الافتراض أن تكون $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. ومن الأفضل أن نفهم θ على أنها الزاوية التي يميل بها مساري الموجتين لأعلى. وهذا التقريب جيد بما يكفي؛ لأن المسافة إلى الشاشة كبيرة، أكبر بكثير من المسافة d.

بالنظر إلى المعادلة لدينا، يمكننا ملاحظة أن قيمة d ثابتة لا تتغير. وهذا يعني أن فرق المسار يتغير بتغير اتجاه الضوء المقيس بالزاوية θ. وهذا التغير هو الذي يُسبِّب نمط المناطق المضيئة والمظلمة على الشاشة.

علينا الآن إضافة طريقة إلى المعادلة لوصف فرق الطور؛ بحيث نحصل على معادلة تصف التداخل البناء (عندما تكون الموجات متفقة في الطور)، ومعادلة أخرى تصف التداخل الهدام (عندما تكون الموجات مختلفة في الطور).

إن فرق الطور بين الموجتين يُقاس بالأطوال الموجية. ومن المهم أن نعرف أن الموجتين لهما الطول الموجي نفسه λ. وعند فرق مسار 0λ، من الواضح أن الموجتين متفقتان في الطور وتتداخلان تداخلًا بنَّاءً بما أن قممهما وقيعانهما متحاذية. ولكن بما أن الموجات دورية وتتكرَّر كل λ، فإن الموجتين ستتحاذيان مرة أخرى عند 1λ. وفي الواقع، أي فرق مسار يوصَف بمضاعفات:

$$n\lambda$$

(حيث n عدد صحيح) سيُنتِج تداخلًا بنَّاءً ومنطقة مضيئة على الشاشة.

وبالمثل، ذكرنا أنه عندما تحاذي قمم إحدى الموجتين قيعان الموجة الأخرى، فسيتداخلان تداخلًا هدَّامًا، وسنرى منطقة مظلمة على الشاشة. ولكي نحاذي الموجتين بهذه الطريقة، نحتاج إلى فرق مسار $\frac{1}{2}\lambda$. لكن إذا فكرنا مرة أخرى في الطبيعة الدورية للموجات كل λ، فسيكون هناك تداخل هدَّام عند $\frac{3}{2}\lambda$، $\frac{5}{2}\lambda$ وهكذا. بعبارة أخرى، لأي عدد صحيح n، يحدث تداخل هدَّام عند أي فرق مسار وفقًا للقاعدة:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda.$$

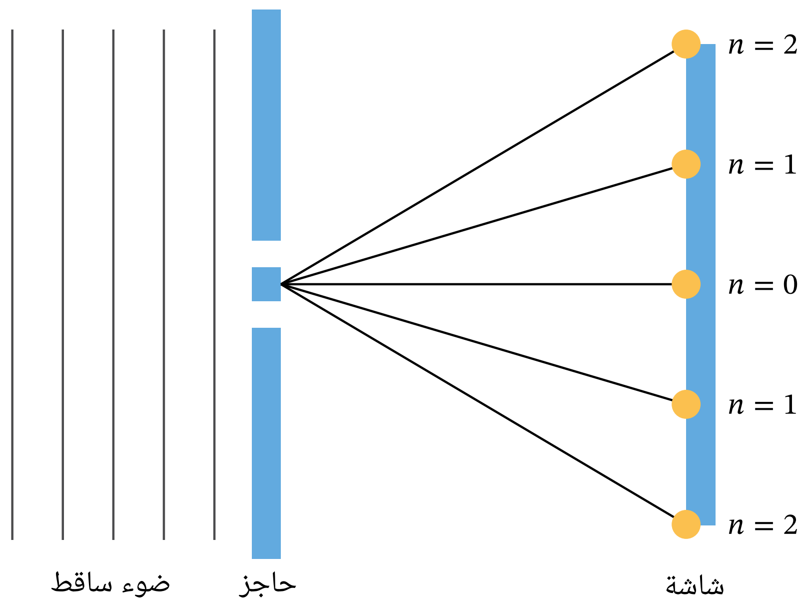
نحن الآن في وضع يؤهلنا للحصول على معادلة للتداخل البنَّاء والتداخل الهدَّام. ومفتاح ذلك هو فهم أن فرق الطور وفرق المسار متساويان. وهذا صحيح لأن الموجتين إن وصلتا عند زمنين مختلفين، فستتحاذيان بطرق مختلفة، وقد يكون لهما فرق طور أو قد لا يكون. إذن، معادلة التداخل البنَّاء هي:

$$d \sin \theta = n\lambda,$$

حيث $n = 0$ يُمثِّل المنطقة المضيئة المركزية؛ أي النقطة الأولى ذات الشدة القصوى. أما التداخل الهدام فمعادلته هي:

$$d \sin \theta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda,$$

حيث $n = 0$ يُمثِّل المنطقة المظلمة الأولى أعلى المركز؛ أي النقطة الأولى ذات الشدة الصغرى. والآن، نتناول بعض الأمثلة التي تعتمد على معادلات التداخل البنَّاء والهدَّام. وفيما يأتي شكل يوضح ما تناظره القيم المختلفة لـ n على الشاشة. فكلما كان n أكبر، عنى ذلك أنك أبعد عن مركز الشاشة لأن فرق المسار يجب أن يكون أكبر.



وفيما يأتي، نستعرض بعض الأمثلة المحلولة. في كثير من الأحيان، تتحدث الأسئلة عن الهدب بدلًا من المناطق المضيئة والمظلمة. إنه ليس سوى تمثيل أفضل لما يظهر على الشاشة في تجربة واقعية، فالمعادلات والأفكار تظل كما هي. وعادةً ما تتحدث الأسئلة عن مراكز الهدب. إن هذه التفرقة هي ما تسمح لنا بالتعامل مع هذه الهدب على أنها مناطق؛ لأن مراكز الهدب تُناظِر مواضع المناطق في الشكل المُبسَّط لدينا.

مثال ١: حساب الطول الموجي للضوء في حالة التداخل البنَّاء

يمر ضوء عبْر لوح فيه شقان ضيقان متوازيان، المسافة بينهما 12.8 μm. يسقط الضوء المار من الشقين على شاشة توازي اللوح؛ حيث يُلاحَظ نمط من الهدب المضيئة والمظلمة. يمر الخط L عموديًّا على سطح اللوح واتجاه الشقين. ويقطع الخط L الهدبة المضيئة المركزية للنمط على الشاشة. الزاوية بين الخط L والخط الذي يقطع مركز الهدبة المضيئة الأقرب للهدبة المضيئة المركزية تساوي 3.09°. ما الطول الموجي للضوء؟ قرِّب إجابتك لأقرب نانومتر.

الحل

من الجيد بدء مثل هذه المسائل بتحديد المعطيات والمطاليب. نحن نتعامل مع هدبة مضيئة؛ ومن ثَم نحتاج إلى المعادلة التي تصف التداخل البنَّاء:

$$d \sin \theta = n\lambda.$$

المعطى الأول هو المسافة بين الشقين، إذن نعرف أن:

$$d = 12.8\ \mu\text{m}.$$

المعطى المهم التالي هو الزاوية وما تمثله. يخبرنا السؤال أن تلك الزاوية هي الزاوية من مركز الهدبة المضيئة المركزية إلى مركز الهدبة المضيئة الأقرب لها (من منتصف الشاشة إلى أعلاها على سبيل المثال). وهذا يخبرنا أننا في الرتبة الأولى:

$$n = 1$$

أي إن:

$$\theta = 3.09°.$$

الخطوة التالية هي إعادة ترتيب المعادلة لیُصبح λ في طرف بمفرده. وباستخدام بعض العمليات الجبرية البسيطة نحصل على:

$$\lambda = \frac{d \sin \theta}{n}.$$

وأخيرًا، لم يتبقَّ لنا سوى التعويض بالقيم مع الانتباه إلى تحويل جميع الوحدات إلى متر. فتكون النتيجة:

$$\lambda = \frac{12.8 \times 10^{-6} \times \sin(3.09)}{1}.$$

إذن، الإجابة النهائية هي:

$$\lambda = 6.9 \times 10^{-7}\ \mathrm{m} = 690\ \mathrm{nm}$$

عندما نحوله مرة أخرى إلى نانومتر.

لا يختلف المثال التالي عن سابقه، إلا أنه أطول قليلًا.

مثال ٢: حساب الزوايا بين الهدب في تداخل الشق المزدوج

يمر ضوء طوله الموجي 597 nm عبْر لوح فيه شقان ضيقان متوازيان، المسافة بينهما 7.64 µm. يسقط الضوء المار من الشقين على شاشة توازي اللوح؛ حيث يُلاحَظ نمط من الهدب المضيئة والمظلمة. يمر الخط L عموديًّا على سطح اللوح واتجاه الشقين قاطعًا الهدبة المضيئة المركزية للنمط على الشاشة. يتقاطع الخطان I وII مع الخط L عند موضع اللوح. يقطع الخط I مركز الهدبة المظلمة الأقرب إلى الهدبة المضيئة المركزية، ويقطع الخط II مركز الهدبة المضيئة الأقرب إلى الهدبة المضيئة المركزية. يقع الخطان I وII على الجانب نفسه من الخط L. ما قياس الزاوية بين الخط I والخط II؟ قرِّب إجابتك لأقرب منزلة عشرية.

الحل

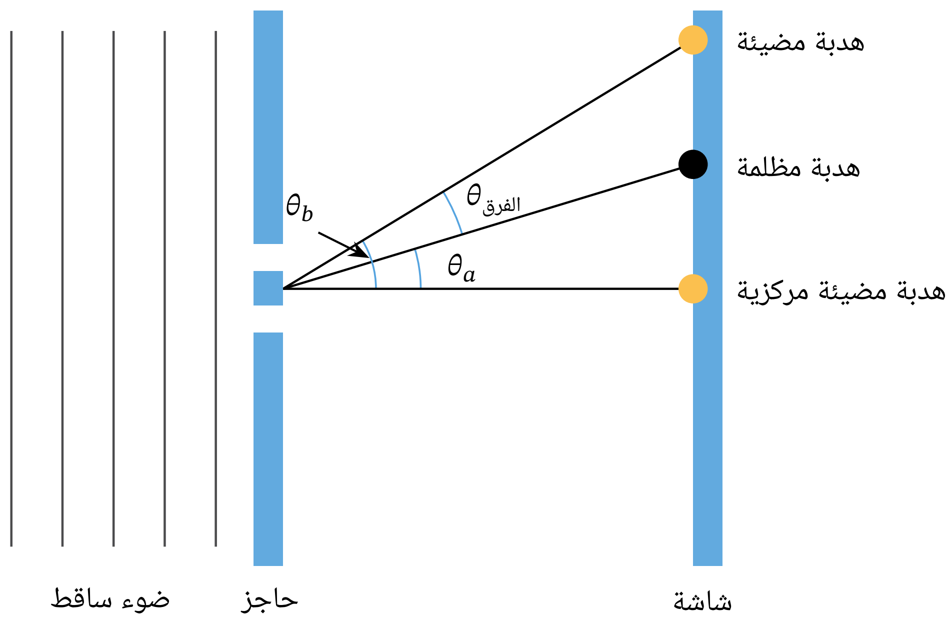
نحن نتعامل مع هدبة مضيئة وهدبة مظلمة؛ لذا نحتاج إلى معادلتي وصف التداخل البنَّاء والهدَّام. وها هي معادلة التداخل البنَّاء:

$$d \sin \theta = n\lambda,$$

وهذه معادلة التداخل الهدَّام:

$$d \sin\theta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda,$$

سيكون من المفيد رسم شكل لتحديد المعطيات والمطاليب.



لإيجاد $\theta_{\text{الفرق}}$ نحتاج إلى إيجاد الفرق بين θ_a وθ_b.

من معطيات السؤال، نعلم أن:

$$d = 7.64\ \mu\text{m},$$

$$\lambda = 597\ \text{nm}.$$

إذن، المجهول الوحيد المتبقي في المعادلات، باستثناء الزوايا، هو n. وبالنظر إلى الشكل، نجد أننا عند الهدبة المظلمة الأقرب إلى الهدبة المضيئة المركزية (الخط I) وعند الهدبة المضيئة الأقرب إلى الهدبة المضيئة المركزية (الخط II). وهذا يعني أن الهدبة المضيئة تكون عند:

$$n = 1$$

والهدبة المظلمة الأولى تكون عند:

$$n = 0.$$

والزاوية θ_a هي الزاوية بين الخط I والخط L؛ وعليه فإن موضعها يُعرَّف بمعادلة التداخل الهدَّام؛ حيث يتعين علينا إضافة $\frac{1}{2}$ إلى n. علينا إعادة ترتيب معادلة التداخل الهدَّام أولًا مع تذكر استخدام الدالة العكسية للجيب:

$$\theta_a = \sin^{-1}\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda}{d}\right).$$

علينا الانتباه إلى تحويل الوحدات إلى متر عند التعويض في المعادلة، وهو ما يعطينا:

$$\theta_a = \sin^{-1}\left(\frac{(0.5)\times 597\times 10^{-9}}{7.64\times 10^{-6}}\right).$$

فيكون الناتج:

$$\theta_a = 2.2^\circ.$$

التالية هي θ_b؛ أي الزاوية بين الخط II والخط L؛ وعليه فإن موضعها يُعرَّف بمعادلة التداخل البنَّاء. وبإعادة ترتيبها للحصول على θ_b، نجد أن:

$$\theta_b = \sin^{-1}\left(\frac{n\lambda}{d}\right).$$

علينا الحرص على تحويل الوحدات إلى متر عند التعويض في المعادلة، وهو ما يعطينا:

$$\theta_b = \sin^{-1}\left(\frac{597\times 10^{-9}}{7.64\times 10^{-6}}\right).$$

فيكون الناتج:

$$\theta_b = 4.4^\circ.$$

وأخيرًا، بما أننا حددنا أن:

$$\theta_{\text{الفرق}} = \theta_b - \theta_a,$$

إذن، الإجابة النهائية هي:

$$\theta_{\text{الفرق}} = 4.4^\circ - 2.2^\circ$$
$$\theta_{\text{الفرق}} = 2.2^\circ.$$

يحتاج هذا المثال التالي إلى مزيد من التفكير الناقد لمعرفة ما يخبرنا به السؤال بالضبط.

مثال ٣: حساب عدد الهدب في تداخل الشق المزدوج

يمر ضوء طوله الموجي 563 nm عبْر صفيحة بها شقان ضيقان متوازيان تفصل بينهما مسافة 8.38 µm. يسقط الضوء من الشقين على شاشة توازي الصفيحة؛ حيث يُلاحَظ نمط من الهدب المضيئة والمظلمة. يمر الخط L عموديًّا على سطح الصفيحة وعلى اتجاه الشقين. يقطع الخط L الهدبة المضيئة المركزية للنمط على الشاشة. ما عدد الهدب المضيئة التي ستظهر على شاشة تمتد، بدون حد معيَّن، على أي من جانبي الخط L؟

الحل

هذا سؤال صعب من ناحية المفاهيم، لكنه يعتمد على معادلة بسيطة. لنبدأ بكتابة المعطيات، ومنها نصل إلى المعادلة التي نحتاج إليها. أخبرنا السؤال أن:

$$\lambda = 563\ \mathrm{nm},$$

$$d = 8.38\ \mathrm{\mu m}.$$

لمعرفة ما علينا فعله بعد ذلك، علينا التفكير جيدًا فيما يخبرنا به السؤال. إنه يطلب منا إيجاد عدد الهدب الكلي على الشاشة بدون حد معيَّن. وهذا يُخبِرنا بأمرين.

فهو يُخبِرنا أولًا أن الشيء الذي نحاول حسابه هو: n، وتحديدًا $n \times 2$. تذكر أن n يُمثِّل في الأساس عدد الهدب في المكان الذي نوجد فيه، مبتدئين العد من المركز. إذن، لحساب عدد الهدب الكلي، علينا مضاعفة هذا العدد.

ثانيًا، يخبرنا الجزء «بدون حد معيَّن» أننا نتعامل مع زاوية θ. ويجب أن تكون على وجه التحديد:

$$\theta = 90^\circ.$$

هذا لأننا نحتاج إلى التفكير في أبعد هدبة ممكنة على الشاشة، وهي التي توجد عند ما لا نهاية. إذ إننا كلما تحركنا أبعد فأبعد عن الهدبة المضيئة المركزية، كلما كانت θ أكبر فأكبر. ويميل خط مسار الضوء المرسوم من الشقين إلى الشاشة أكثر فأكثر نحو الموضع الرأسي مع زيادة θ وn. إذن، عند ما لا نهاية، نكون قد وصلنا إلى القيمة النهائية لـ n؛ حيث يكون مسار الضوء رأسيًّا؛ أي إن θ تساوي 90°، وحينها سنكون قد ضَمَّنا جميع الهدب الممكنة على الشاشة. قد تكون كلمة ما لا نهاية غير مناسبة هنا، لكن تذكر أننا نريد التأكد من أننا لم نُهمِل أي هدبة. ولذا، علينا تحريك خط المسار إلى أقصى مسافة على الشاشة.

بعد كل ما سبق، نعلم الآن أي معادلة سنستخدم:

$$\sin\theta = \frac{n\lambda}{d}.$$

بما أننا نتعامل مع هدب مضيئة، فلا بد أن هناك تداخلًا بنَّاءً. وبإعادة ترتيب المعادلة للحصول على n باستخدام بعض العمليات الجبرية البسيطة نحصل على:

$$n = \frac{d\sin\theta}{\lambda}.$$

علينا الانتباه عند التعويض إلى تحويل الوحدات إلى متر، فنحصل على:

$$n = \frac{8.38 \times 10^{-6} \times \sin(90)}{563 \times 10^{-9}}.$$

وهذا يعطينا:

$$n = 14.88454\ldots.$$

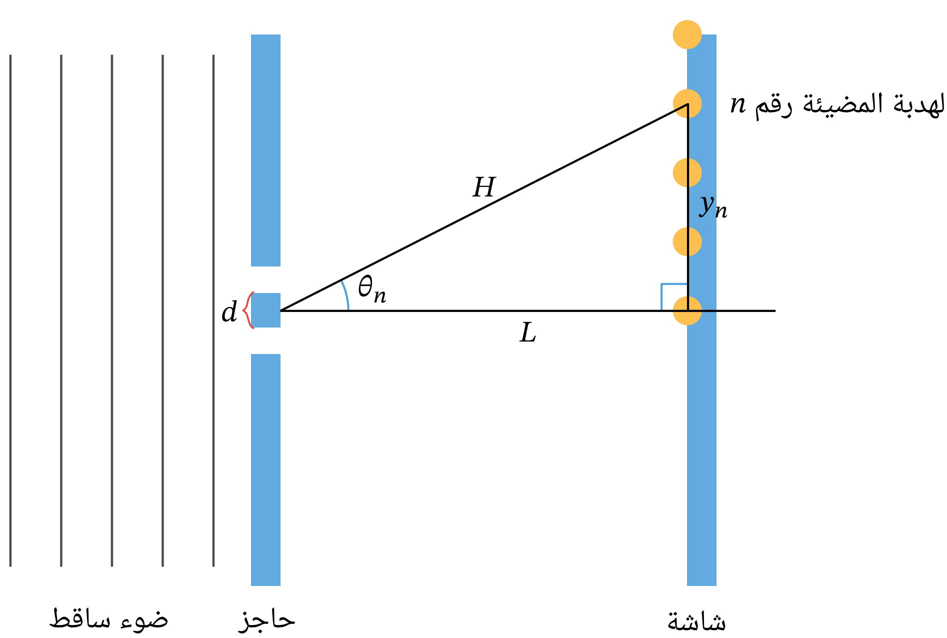
كما ناقشنا سابقًا، ستكون الإجابة $2n$ لأننا عددنا نصف الهدب المضيئة أعلى الهدبة المضيئة المركزية، ولم نعد النصف الآخر بالأسفل:

$$2n = 29.76909\ldots.$$

ومع ذلك، ليست هذه هي الإجابة النهائية. قد ترغب بديهيًا في تقريب هذا العدد إلى 30 أو حتى 29.8. ولكن هذا سيكون خطأً. أولًا، لا يمكن أن يكون لدينا 0.8 هدبة، فنحن نحتاج إلى عدد صحيح للحصول على إجابة صحيحة. ثانيًا، لا يمكننا التقريب لأعلى لأن هذا سيكون إضافة هدبة أخرى إلى الناتج. إذن، يجب أن نقرب الناتج لأسفل. وإذا أعدنا صياغة هذا السؤال ليطلب إيجاد عدد الهدب الكاملة، فسيتضح لِمَ يجب علينا التقريب لأسفل. وعليه، الإجابة النهائية هي:

عدد الهدب $= 29$.

ماذا إن أردنا إيجاد بُعد الهدب المضيئة عن مركز الشاشة بدلًا من الزاوية θ من نقطة المركز؟ كما فعلنا من قبل، سنرسم شكلًا توضيحيًا ثم نستخدم حساب المثلثات للوصول إلى معادلة.



لدينا y_n في الشكل، وهو المسافة الرأسية إلى الهدبة المضيئة رقم n على الشاشة. وهذا يمثل ارتفاع المثلث القائم. هناك أيضًا L؛ أي المسافة من الشقين إلى مركز الشاشة. وهذا يمثل قاعدة المثلث القائم. من المفيد أيضًا أن نُعرِّف H باعتباره وتر المثلث، والزاوية θ_n باعتبارها الزاوية رقم n من المركز.

عند هذه النقطة، نكون قد افترضنا افتراضًا. لاحظ أن الشقين يبدوان أصغر قليلًا على الشكل من ذي قبل. وهذا لأننا صغَّرنا الشكل عن الشكل السابق لتوضيح أن المسافة بين الشقين d أصغر بكثير من L وفقًا لهذا المقياس. وهذا يعني اتبعنا تقريبًا يُفيد أن الضوء يأتي من الحاجز من النقطة نفسها حيث يبدأ الخط L. وهذا من شأنه أن يُبسِّط المسألة ويسمح لنا بتكوين المثلث القائم. وهذا افتراض مناسب؛ لأن d في تجارب الشق المزدوج يكون له مقدار قريب من الطول الموجي للضوء المُستخدَم. وهذا يؤدي إلى أقصى حيود؛ ومن ثَمَّ يؤدي إلى نمط تداخل أوضح على الشاشة. ونظرًا لأن الموجات المُستخدَمة ضوء مرئي، والمسافة d تساوي مئات النانومتر تقريبًا، فإن التقريب الذي افترضناه جيد كفاية.

يمكننا الحصول على معادلتين باستخدام حساب المثلثات؛ تتضمن إحداهما H، وتتضمن الأخرى L:

$$\tan\theta_n = \frac{y_n}{L},$$
$$\sin\theta_n = \frac{y_n}{H}.$$

بعد ذلك، نعتمد على تقريب ثانٍ وهو **تقريب الزاوية الصغيرة**. ذكرنا في وصف التجهيز الأول أن الشاشة توضع على مسافة كبيرة، L، من الحاجز. وهذا يعني أن الزاوية θ_n صغيرة جدًّا، وأن قيمة L متقاربة للغاية مع قيمة H. ولذا، يمكننا استخدام التقريب:

$$\tan\theta_n = \sin\theta_n$$

وبذلك يمكننا تعريف المعادلة كالآتي:

$$\sin\theta_n = \frac{y_n}{L}.$$

الخطوة الأخيرة هي حذف الجزء الذي يتضمن θ من المعادلة لأننا نريد تعريف موضع الهدب المضيئة بدلالة المسافة فحسب. ولهذا السبب غيَّرنا دالة الظل إلى دالة الجيب، فقد سمح لنا ذلك بمساواة معادلة التداخل البنَّاء بالمعادلة التي حصلنا عليها:

$$\sin\theta = \frac{n\lambda}{d},$$

فأصبح لدينا:

$$\frac{y_n}{L} = \frac{n\lambda}{d}.$$

يمكن إعادة ترتيب هذه المعادلة بسهولة لجعل y_n في طرف بمفرده:

$$y_n = \frac{n\lambda L}{d}.$$

يعطينا هذا المعادلة التي نبحث عنها. فهي تصف مواضع الهدب المضيئة (مواضع التداخل البنَّاء) بدلالة المسافة من المركز.

فيما يأتي بعض الأمثلة على المعادلات التي حصلنا عليها، والمفاهيم التي طرحناها.

مثال ٤: حساب المسافة بين الهدب في تداخل الشق المزدوج

يمر ضوء طوله الموجي 604 nm عبْر لوح فيه شقان ضيقان متوازيان المسافة بينهما 9.44 µm. يسقط الضوء المار من الشقين على شاشة توازي اللوح، وتبعد عنه مسافة 1.25 m؛ حيث يُلاحَظ نمط من الهدب المضيئة والمظلمة. يمر الخط L عموديًا على سطح اللوح واتجاه الشقين. يقطع الخط L الهدبة المضيئة المركزية للنمط على الشاشة. ما المسافة على الشاشة من الخط L إلى مركز الهدبة المضيئة الأقرب إلى الهدبة المضيئة المركزية؟ قرِّب إجابتك لأقرب سنتيمتر.

الحل

إن أفضل طريقة لبدء سؤال كهذا هي كتابة المعادلة المتعلقة بالسؤال والمعطيات التي أخبرنا بها. عرفنا أن:

$$\lambda = 604\ \text{nm},$$

$$d = 9.44\ \mu\text{m},$$

$$L = 1.25\ \text{m}.$$

بما أن السؤال يطلب منا إيجاد المسافة على الشاشة، فسنستخدم المعادلة:

$$y_n = \frac{n\lambda L}{d},$$

حيث y_n المسافة على الشاشة من الهدبة المضيئة المركزية إلى الهدبة المضيئة رقم n. وعرفنا أيضًا قيمة n؛ لأننا عند الهدبة المضيئة الأقرب إلى الهدبة المضيئة المركزية. إذن:

$$n = 1.$$

الخطوة التالية هي التعويض بالقيم مع الانتباه إلى تحويل جميع الوحدات إلى متر لنحصل على الإجابة:

$$y_1 = \frac{1 \times 604 \times 10^{-7} \times 1.25}{9.44 \times 10^{-6}} = 0.08\ \text{m}.$$

وأخيرًا، علينا التحويل إلى سنتيمتر كما هو مطلوب في السؤال:

$$y_1 = 8\ \text{cm}.$$

هذا المثال التالي بسيط رياضيًا، لكنه يتطلَّب تفكيرًا ناقدًا للحصول على الإجابة الصحيحة.

مثال ٥: مقارنة الأطوال الموجية لأنماط التداخل المختلفة

يمر ضوء له طولان موجيان مختلفان عبْر صفيحة بها شقان ضيقان متوازيان. يسقط الضوء المار من الشقين على شاشة توازي الصفيحة؛ حيث يُلاحَظ نمط من الهدب المضيئة والمظلمة. يمر الخط L عموديًّا على سطح الصفيحة وعلى اتجاه الشقين. يقطع الخط L الهدبة المضيئة المركزية للنمط على الشاشة. المسافة على الشاشة للطول الموجي الأقصر من L إلى مركز الهدبة المضيئة الأقرب للهدبة المضيئة المركزية تساوي: 5.55 cm. المسافة على الشاشة للطول الموجي الأطول من L إلى مركز الهدبة المضيئة الأقرب للهدبة المضيئة المركزية تساوي: 7.25 cm. ما نسبة الطول الموجي الأطول للضوء إلى الطول الموجي الأقصر؟ أوجد إجابتك لأقرب منزلتين عشريتين.

الحل

يُعطينا هذا السؤال قيمتين. وهما المسافة بين الهدبة المضيئة الأولى والهدبة المضيئة المركزية لنمطين مختلفين؛ ومن ثَمَّ موضعين مختلفين للهدبة المضيئة الأولى. على وجه التحديد، لدينا:

$$y_{\text{الأقصر}} = y_{\text{s}} = 5.5 \text{ cm},$$

للطول الموجي الأقصر، ولدينا:

$$y_{\text{الأطول}} = y_{\text{l}} = 7.25 \text{ cm},$$

للطول الموجي الأطول. يمكننا إدراك أن المعادلة التي سنستخدمها هي:

$$y_n = \frac{n\lambda L}{d},$$

حيث y_n المسافة إلى الهدبة المضيئة رقم n من المركز. وهذا يعني أن لدينا معادلتين؛ واحدة لكل طول موجي:

$$y_{\text{s}} = \frac{n\lambda_{\text{s}} L}{d},$$
$$y_{\text{l}} = \frac{n\lambda_{\text{l}} L}{d}.$$

علينا أن نتذكر هنا أن هاتين المعادلتين تصفان المسافة إلى الهدبة المضيئة الأولى لكلا النمطين. وهذا يعني أن $n = 1$:

$$y_{\text{s}} = \frac{1 \times \lambda_{\text{s}} L}{d},$$
$$y_{\text{l}} = \frac{1 \times \lambda_{\text{l}} L}{d}.$$

بإعادة ترتيب المعادلتين لجعل الطول الموجي في طرف بمفرده لأنه ما نريد إيجاده:

$$\lambda_{\mathrm{s}} = \frac{y_{\mathrm{s}} d}{L},$$
$$\lambda_{\mathrm{l}} = \frac{y_{\mathrm{l}} d}{L}.$$

المشكلة التالية التي نواجهها هي أننا لا نعرف أي قيم أخرى من المعادلتين. ونظرًا لأن السؤال عن النسبة بين الطولين الموجيين، فيمكننا تجاوز ذلك. بمعرفة أن d وL هما نفسهما في كلتا المعادلتين؛ يمكننا دمج المعادلتين لتكوين معادلة واحدة:

$$\frac{\lambda_{\mathrm{l}}}{\lambda_{\mathrm{s}}} = \frac{\left(\frac{y_{\mathrm{l}} d}{L}\right)}{\left(\frac{y_{\mathrm{s}} d}{L}\right)}.$$

تُحذَف القيمتان غير المعلومتين الآن، ويتبقى لدينا:

$$\frac{\lambda_{\mathrm{l}}}{\lambda_{\mathrm{s}}} = \frac{y_{\mathrm{l}}}{y_{\mathrm{s}}}.$$

الإجابة النهائية هي:

$$\frac{\lambda_{\mathrm{l}}}{\lambda_{\mathrm{s}}} = \frac{7.25}{5.55} = 1.31.$$

النقاط الرئيسية

- موجات الضوء المترابطة التي تمر عبْر شق مزدوج ستحيد (ومن ثَمَّ يتداخل بعضها مع بعض) منشئة بذلك نمطًا من الهدب المضيئة والمظلمة على شاشة.
- بالنسبة إلى الهدبة المضيئة رقم n، يحدث التداخل البنَّاء عند زوايا تُعرَّف بالمعادلة: $d \sin\theta = n\lambda$.
- بالنسبة إلى الهدبة المظلمة رقم n، يحدث التداخل الهدَّام عند زوايا تُعرَّف بالمعادلة: $d \sin\theta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$.
- تُعرِّف المعادلة: $y_n = \frac{n\lambda L}{d}$ موضع الهدبة المضيئة رقم n بدلالة المسافة من مركز الشاشة.