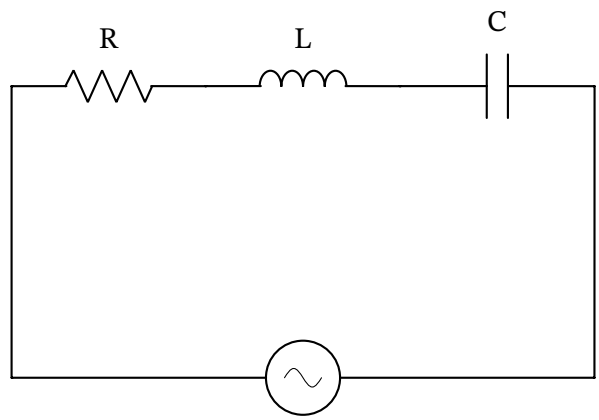
شارح: الرنين في دوائر التيار المتردِّد

في هذا الشارح، سوف نتعلَّم كيف نحسب تردُّد الرنين لدوائر بسيطة تحتوي على مقاومة ومكثِّف وملف حث.

يوضِّح الشكل الآتي دائرة تحتوي على مقاومة (R) وملف حث (L) ومكثِّف (C) كلٌّ منها متصل بمصدر فرق جهد متردِّد.



يتردَّد مصدر فرق الجهد المتردِّد بتردُّد معيَّن، f.

تتأثَّر معاوقة الدائرة بتردُّد فرق الجهد المتردِّد. فكلما زاد تردُّد فرق الجهد المتردِّد، زادت المفاعلة الحثية، وقلَّت المفاعلة السعوية (لكن ليس بالتساوي). وتعتمد معاوقة الدائرة على الفرق المطلق بين المفاعلة الحثية والمفاعلة السعوية.

ثمة صيغة لحساب معاوقة دوائر التيار المتردِّد التي تحتوي على مقاومة وملف حث ومكثِّف كلٌّ منها موصَّل على التوالي.

صيغة: المعاوقة

يمكن إيجاد المعاوقة، Z، لدائرة كهربية من خلال:

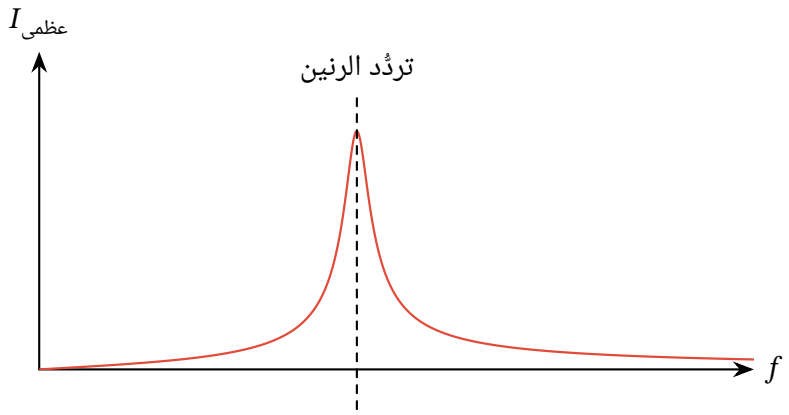
$$Z = \left(R^2 + (X_L - X_C)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

حيث R مقاومة الدائرة، وX_L المفاعلة الحثية للدائرة، وX_C المفاعلة السعوية للدائرة.

تردُّد رنين الدائرة هو تردُّد فرق الجهد المتردِّد المطبَّق الذي تَنتج عنه قيمة عظمى للتيار في الدائرة.

تُنتِج تردُّدات فرق الجهد المتردِّد القريبة من تردُّد الرنين تيارات تقترب من مقدار تيار تردُّد الرنين، وتُنتِج التردُّدات البعيدة عن تردُّد الرنين تيارات أقل في المقدار.

يوضِّح التمثيل البياني الآتي كيف تتغيَّر القيمة العظمى لشدة التيار في الدائرة مقابل التردُّد.



يمكننا أن نرى من صيغة المعاوقة:

$$Z = \left(R^2 + (X_L - X_C)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

أنه عندما يكون:

$$X_L - X_C = 0$$

يجب أن يكون:

$$Z = R$$

وهو ما يعني أن معاوقة الدائرة تكون عند قيمتها الصغرى. وتكون شدة التيار عند قيمتها العظمى عند هذه المعاوقة.

تُوجَد صيغة لإيجاد قيمة المفاعلة السعوية.

صيغة: المفاعلة السعوية

يمكن إيجاد المفاعلة السعوية X_C، لدائرة سعتها C، يمر بها تيار متردِّد تردُّده f، من خلال الصيغة:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}.$$

تُوجَد صيغة لإيجاد قيمة المفاعلة الحثية.

صيغة: المفاعلة الحثية

يمكن إيجاد المفاعلة الحثية X_L، لدائرة معامل حثها L، يمر بها تيار متردِّد تردُّده f، من خلال الصيغة:

$$X_L = 2\pi f L.$$

عندما تكون المعاوقة عند قيمتها الصغرى، لا بد أن يكون:

$$2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C} = 0.$$

يمكن إعادة ترتيب هذه المعادلة كالآتي:

$$\begin{aligned} 2\pi f L &= \frac{1}{2\pi f C} \\ 2\pi f &= \frac{1}{2\pi f L C} \\ (2\pi f)^2 &= \frac{1}{LC} \\ 2\pi f &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \end{aligned}$$

حيث f تردُّد رنين الدائرة.

وبذلك نحصل على صيغة لتردُّد الرنين.

صيغة: تردُّد الرنين

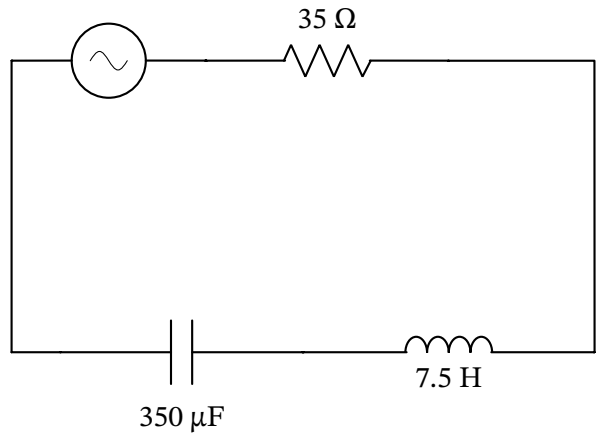
يمكن إيجاد تردُّد الرنين f، لدائرة معامل حثها L، وسعتها C، من خلال الصيغة:

$$2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

هيا نُلقِ نظرة على بعض الأمثلة.

مثال ١: تحديد تردُّد رنين دائرة كهربية

ما تردُّد رنين الدائرة الكهربية الموضَّحة في الشكل؟ قرِّب إجابتك لأقرب منزلة عشرية.



الحل

يمكن إيجاد تردُّد الرنين، f، من خلال الصيغة:

$$2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

عندما نعوِّض بالقيم المُعطاة في السؤال، نحصل على:

$$2\pi f = \sqrt{\frac{1}{7.5\ \text{H} \times 3.5 \times 10^{-4}\ \text{F}}}.$$

ولأقرب منزلة عشرية، فإن f يساوي 3.1 Hz.

مثال ٢: تحديد القيمة العظمى لشدة التيار في دائرة تهتز بتردُّد الرنين

تحتوي دائرة كهربية على مقاومة ومكثِّف وملف حث، كلٌّ منها موصَّل على التوالي، تردُّد رنين الدائرة 372 Hz. قيمة المقاومة 440 Ω، وسعة المكثِّف 112 mF. القيمة العظمى لفرق الجهد المطبَّق على الدائرة 28 V. ما القيمة العظمى لشدة التيار عندما يكون تردُّد التيار المتردِّد المار في الدائرة 372 Hz؟ قرِّب إجابتك لأقرب منزلتين عشريتين.

الحل

تردُّد رنين الدائرة يساوي 372 Hz.

مطلوب منا في السؤال تحديد القيمة العظمى لشدة التيار.

القيمة العظمى لفرق الجهد المطبَّق تساوي 28 V. ولإيجاد القيمة العظمى لشدة التيار، علينا إيجاد معاوقة الدائرة.

يمكن إيجاد المعاوقة، Z، لدائرة من خلال الصيغة:

$$Z = \left(R^2 + (X_L - X_C)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

حيث R مقاومة الدائرة، وX_L المفاعلة الحثية للدائرة، وX_C المفاعلة السعوية للدائرة.

لم يذكر السؤال قيمتَي X_C وX_L. بإمكاننا إيجاد هاتين القيمتَيْن من صيغتَي المفاعلة السعوية والمفاعلة الحثية للدائرة:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C},$$
$$X_L = 2\pi f L$$

صيغة تردُّد الرنين للدائرة:

$$2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

لكن بما أن الدائرة تهتز بتردُّد الرنين، إذن لا بد أن يكون:

$$X_L - X_C = 0$$

ومن ثَمَّ:

$$Z = R.$$

لإيجاد القيمة العظمى لشدة التيار، علينا قسمة القيمة العظمى لفرق الجهد على R:

$$I = \frac{28\ \text{V}}{440\ \Omega}.$$

ولأقرب منزلتين عشريتين، فإن I يساوي 0.06 A.

مثال ٣: تحديد سعة دائرة تهتز بتردُّد الرنين

تحتوي دائرة كهربية على مكثِّف وملف حث موصلَيْن على التوالي، تردُّد الرنين للدائرة 575 kHz. قيمة معامل حث الدائرة 1.25 H. ما سعة المكثِّف؟ أوجد إجابتك بالصيغة العلمية لأقرب منزلتين عشريتين.

الحل

ترتبط سعة المكثِّف بتردُّد رنين الدائرة، ويمكن الحصول عليه من خلال الصيغة:

$$2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

طبقًا للسؤال، فإن L يساوي 1.25 H، وf يساوي 575 kHz، وهو ما يساوي 5.75×10^5 Hz.

يجب إعادة ترتيب الصيغة لجعل C في طرف بمفرده على النحو الآتي:

$$(2\pi f)^2 = \frac{1}{LC}$$
$$C = \frac{1}{(2\pi f)^2 L}.$$

بالتعويض بالقيم المعلومة، نحصل على:

$$C = \frac{1}{(2\pi \times 5.75 \times 10^5 \text{ Hz})^2 \times 1.25 \text{ H}}.$$

بالصيغة العلمية لأقرب منزلتين عشريتين، فإن C يساوي 6.13×10^{-14} F.

مثال ٤: تحديد المفاعلة الحثية لدائرة تهتز بتردُّد الرنين

تحتوي دائرة كهربية على مكثِّف وملف حث موصلَين على التوالي، تردُّد الرنين للدائرة 155 kHz. سعة المكثِّف في الدائرة 215 μF. ما المفاعلة الحثية للدائرة؟ أوجد الإجابة بالصيغة العلمية لأقرب منزلتين عشريتين.

الحل

يمكن إيجاد المفاعلة الحثية للدائرة من خلال الصيغة:

$$X_L = 2\pi f L$$

طبقًا للسؤال، فإن f يساوي 155 kHz، وهو ما يساوي 1.55×10^5 Hz، وL معامل حث ملف الحث.

لم تُذكَر قيمة L في السؤال. ولكن يمكن إيجادها باستخدام تردُّد رنين الدائرة، الذي يُعطى بالصيغة:

$$2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

طبقًا للسؤال، فإن C يساوي 215 μF، وهو ما يساوي 2.15×10^{-4} F.

يجب إعادة ترتيب صيغة تردُّد الرنين لجعل L في طرف بمفرده على النحو الآتي:

$$(2\pi f)^2 = \frac{1}{LC}$$
$$L = \frac{1}{(2\pi f)^2 C}.$$

بالتعويض بالقيم المعلومة، نحصل على:

$$L = \frac{1}{(2\pi \times 1.55 \times 10^5 \text{ Hz})^2 \times 2.15 \times 10^{-4} \text{ F}}$$
$$L \approx 4.9 \times 10^{-9} \text{ H}.$$

يمكننا التعويض بهذه القيمة في:

$$X_L = 2\pi f L.$$

بالصيغة العلمية لأقرب منزلتين عشريتين، فإن X_L يساوي $4.78 \times 10^{-3}\ \Omega$.

يمكن حل هذا السؤال أيضًا بتذكُّر أن المفاعلتين الحثية والسعوية تتساويان عند تردُّد الرنين؛ ومن ثَمَّ، كان من الممكن حساب المفاعلة السعوية بدلًا من المفاعلة الحثية. ويمكن حساب المفاعلة السعوية ببساطة من تردُّد الدائرة وسعتها عن طريق الصيغة:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}$$

وقد أُعطينا قيمتَي f وC في السؤال.

هيا نلخِّص الآن ما تعلَّمناه في هذا الشارح.

النقاط الرئيسية

- تردُّد رنين دائرة تيار متردِّد تحتوي على مقاومة وملف حث ومكثِّف كلٌّ منها موصَّل على التوالي هو التردُّد الذي يؤدِّي فرق الجهد المتردِّد المطبَّق عنده إلى قيمة عظمى للتيار.
- عند تردُّد رنين دائرة تيار متردِّد، تكون معاوقة الدائرة مساوية لمقاومة الدائرة.
- يمكن حساب تردُّد الرنين، f، لدائرة تيار متردِّد من خلال الصيغة:

$$2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

حيث L معامل حث الدائرة، وC سعة الدائرة.