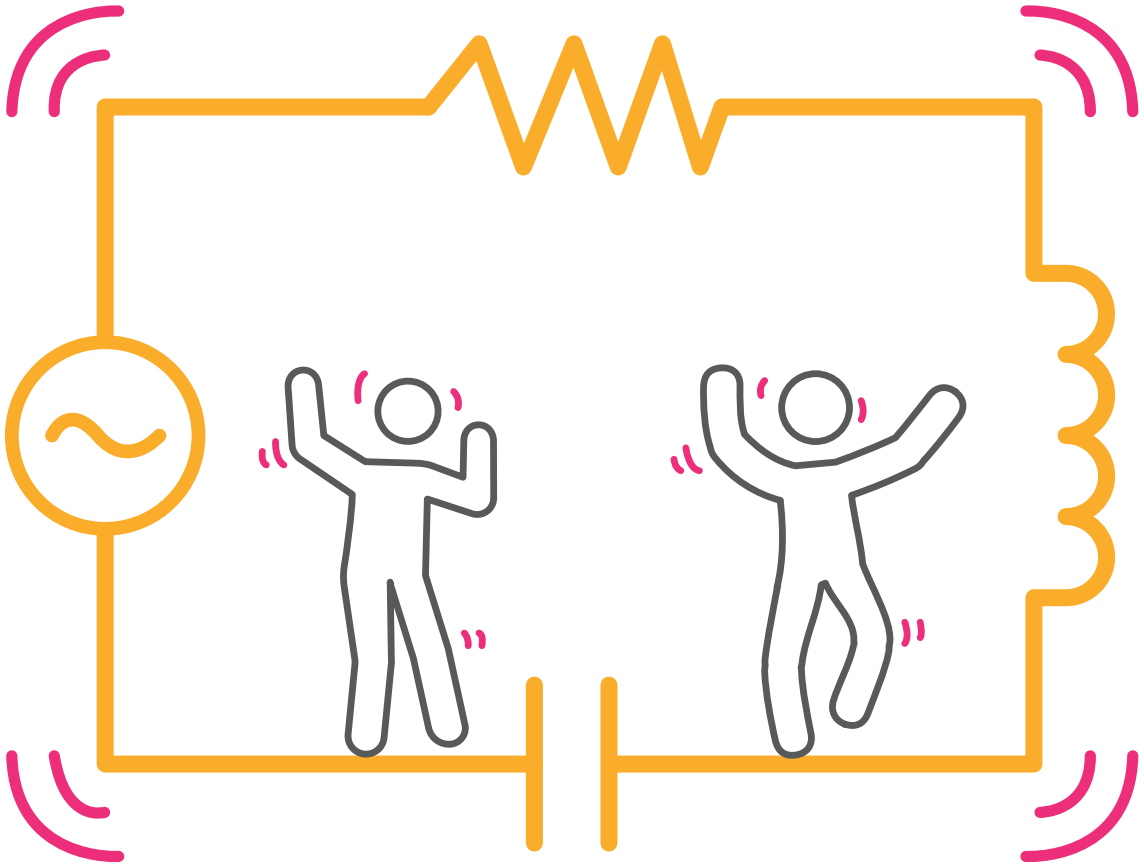


الرنين في دوائر التيار المتردِّد

أهداف الدرس

ستتمكَّن من:

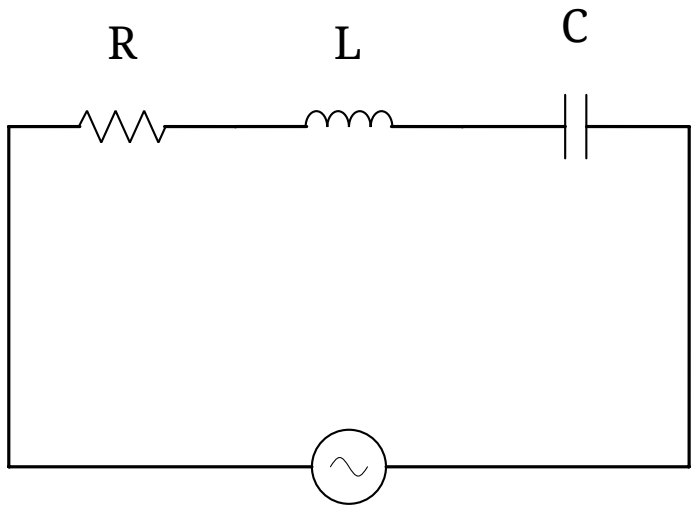
- استخدام المعادلات الآتية لحساب تردد رنين الدوائر الكهربية وقيم معامل الجودة Q: $\omega_{\text{resonant}} = \frac{1}{(LC)^{\frac{1}{2}}}$ و $Q = \frac{\omega L}{R}$.

تذكير: مكونات وخصائص دوائر التيار المتردِّد

دوائر التيار المتردِّد هي دوائر متصلة بمصادر لها فرق جهد متردِّد. يوفر مصدر فرق الجهد المتردد فرق جهد لحظيًّا متغيرًا بشكل دوري. ومن ثم، فإن دائرة التيار المتردد لها قيمة تردد.

يمكن أن تحتوي دوائر التيار المتردد على مجموعة من المقاومات وملفات الحث والمكثفات. ومن ثم، فإن دوائر التيار المتردد لها قيم للمقاومة ومعامل الحث والسعة الكهربية.

يوضِّح الشكل الآتي دائرة تحتوي على مقاومة (R) وملف حث (L) ومكثِّف (C) كلٌّ منها متصل بمصدر فرق جهد متردِّد.



تذكير: مفاعلة دوائر التيار المتردِّد

يُعد معامل الحث وتردد الدائرة من بين العوامل المؤثرة على المفاعلة الحثية لدائرة التيار المتردد.

يُمكن إيجاد المفاعلة الحثية X_L، لدائرة معامل حثها L، يمر بها تيار متردِّد تردُّده f، من خلال الصيغة:

$$X_L = 2\pi f L.$$

تُعد السعة الكهربية وتردد الدائرة من بين العوامل المؤثرة على المفاعلة السعوية لدائرة تيار متردد.

يمكن إيجاد المفاعلة السعوية X_C، لدائرة سعتها C، يمر بها تيار متردِّد تردُّده f، من خلال الصيغة:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}.$$

تذكير: معاوقة دوائر التيار المتردِّد

تُعرف النسبة بين القيمة العظمى لفرق الجهد عبر أحد مكونات الدائرة والقيمة العظمى للتيار في مكون ذي تيار متردد بأنها معاوقة الدائرة.

يمكن إيجاد المعاوقة، Z، لدائرة تيار متردِّد من خلال الصيغة:

$$Z = \left(R^2 + (X_L - X_C)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

حيث R مقاومة الدائرة، وX_L المفاعلة الحثية للدائرة، وX_C المفاعلة السعوية للدائرة.

تذكير: زاوية الطور بين فرق الجهد اللحظي والتيار اللحظي في دوائر التيار المتردد

زاوية الطور بين فرق الجهد اللحظي والتيار اللحظي لدائرة تيار متردد تساوي صفرًا بالنسبة لدوائر المقاومة البحتة.

بالنسبة لدوائر التيار المتردد التي لها مفاعلة حثية غير صفرية ومفاعلة سعوية صفرية، فإن فرق الجهد اللحظي يتقدم على التيار اللحظي بزاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ راديان.

بالنسبة لدوائر التيار المتردد التي لها مفاعلة سعوية غير صفرية ومفاعلة حثية صفرية، فإن التيار اللحظي يتقدم على فرق الجهد اللحظي بزاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ راديان.

تعريف تردد الرنين في دائرة التيار المتردِّد

تردد الرنين في دائرة التيار المتردد هو التردد الذي تكون عنده مقاومة الدائرة عند أدنى قيمة.

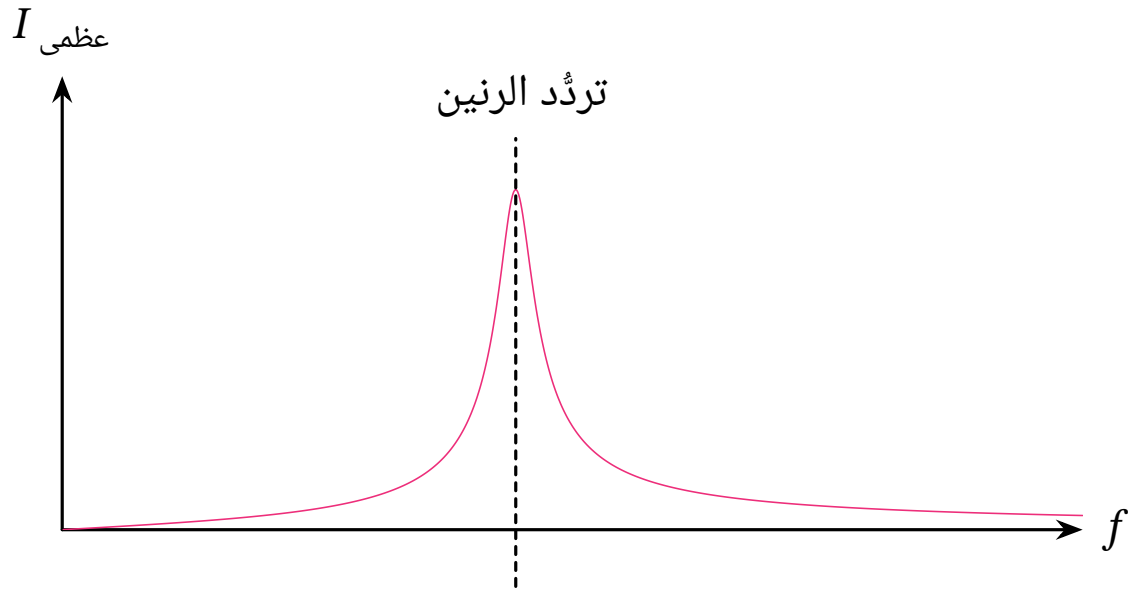
القيمة العظمى للتيار في دائرة التيار المتردد لها أعلى قيمة عندما تكون معاوقة الدائرة عند أدنى قيمة.

القيمة العظمى للتيار في دائرة التيار المتردد لها أعلى قيمة عندما تكون الدائرة متصلة بمصدر فرق جهد متردد له تردد مساوٍ لتردد رنين الدائرة.

تعريف تردد الرنين في دائرة التيار المتردِّد (متابعة)

تُنتِج تردُّدات فرق الجهد المتردِّد القريبة من تردُّد الرنين تيارات تقترب من مقدار تيار تردُّد الرنين، وتُنتِج التردُّدات البعيدة عن تردُّد الرنين تيارات أقل في المقدار.

يوضِّح التمثيل البياني الآتي كيف تتغيَّر القيمة العظمى لشدة التيار في الدائرة مقابل التردُّد.



تعريف تردد الرنين في دائرة التيار المتردِّد (متابعة)

يمكننا أن نرى من صيغة المعاوقة:

$$Z = \left(R^2 + (X_L - X_C)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

أنه عندما يكون:

$$X_L - X_C = 0,$$

يجب أن يكون:

$$Z = R,$$

وهو ما يعني أن معاوقة الدائرة تكون عند قيمتها الصغرى. وتكون شدة التيار عند قيمتها العظمى عند هذه المعاوقة.

تعريف تردد الرنين في دائرة التيار المتردِّد (متابعة)

يُمكن إيجاد المفاعلة الحثية X_L، لدائرة معامل حثها L، يمر بها تيار متردِّد تردُّده f، من خلال الصيغة:

$$X_L = 2\pi f L.$$

يمكن إيجاد المفاعلة السعوية X_C، لدائرة سعتها C، يمر بها تيار متردِّد تردُّده f، من خلال الصيغة:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}.$$

عندما تكون المعاوقة عند قيمتها الصغرى، لا بد أن يكون:

$$2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C} = 0.$$

تعريف تردد الرنين في دائرة التيار المتردِّد (متابعة)

يمكن إعادة ترتيب المعادلة

$$2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC} = 0$$

لتصبح f في طرف بمفردها:

$$\begin{aligned} 2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC} &= 0 \\ 2\pi fL &= \frac{1}{2\pi fC} \\ 2\pi f &= \frac{1}{2\pi fLC} \\ (2\pi f)^2 &= \frac{1}{LC} \\ 2\pi f &= \sqrt{\frac{1}{LC}}, \end{aligned}$$

حيث f تردُّد رنين الدائرة.

تعريف تردد الرنين في دائرة التيار المتردِّد (متابعة)

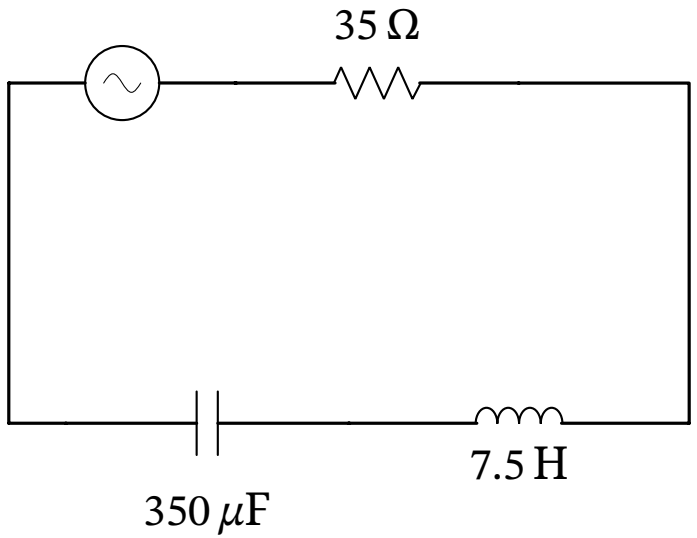
يمكن إيجاد تردُّد الرنين f، ، لدائرة معامل حثها L، وسعتها C، من خلال الصيغة:

$$2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

هيا نُلقِ نظرة على بعض الأمثلة.

مثال ١: تحديد تردُّد رنين دائرة كهربية

ما تردُّد رنين الدائرة الكهربية الموضَّحة في الشكل؟ قرِّب إجابتك لأقرب منزلة عشرية.



مثال ١ (متابعة)

الحل

تردُّد الرنين، f، ، يُعطى من خلال الصيغة:

$$2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

بالتعويض بالقيم المُعطاة في السؤال، نحصل على:

$$2\pi f = \sqrt{\frac{1}{7.5\,\mathrm{H} \times 3.5 \times 10^{-4}\,\mathrm{F}}}.$$

ولأقرب منزلة عشرية، فإن f يساوي $3.1\,\mathrm{Hz}$.

مثال ٢ : تحديد القيمة العظمى لشدة التيار في دائرة تهتز بتردُّد الرنين

تحتوي دائرة كهربية على مقاومة ومكثِّف وملف حث، كلٌّ منها موصَّل على التوالي، تردُّد رنين الدائرة 372 Hz. قيمة المقاومة 440 Ω، وسعة المكثِّف 112 mF. القيمة العظمى لفرق الجهد المطبَّق على الدائرة 28 V. ما القيمة العظمى لشدة التيار عندما يكون تردُّد التيار المتردِّد المار في الدائرة 372 Hz؟ قرِّب إجابتك لأقرب منزلتين عشريتين.

الحل

تردُّد رنين الدائرة يساوي 372 Hz.

مطلوب منا في السؤال تحديد القيمة العظمى لشدة التيار.

القيمة العظمى لفرق الجهد المطبَّق تساوي 28 V. ولإيجاد القيمة العظمى لشدة التيار، علينا إيجاد معاوقة الدائرة.

مثال ٢ (متابعة)

يمكن إيجاد المعاوقة، Z، لدائرة من خلال الصيغة:

$$Z = \left(R^2 + (X_L - X_C)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

حيث R مقاومة الدائرة، وX_L المفاعلة الحثية للدائرة، وX_C المفاعلة السعوية للدائرة.

لم يذكر السؤال قيمتَي X_C وX_L. بإمكاننا إيجاد هاتين القيمتَيْن من صيغتَي المفاعلة السعوية والمفاعلة الحثية للدائرة:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C},$$
$$X_L = 2\pi f L,$$

صيغة تردُّد الرنين للدائرة:

$$2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

مثال ٢ (متابعة)

لكن بما أن الدائرة تهتز بتردُّد الرنين، إذن لا بد أن يكون:

$$X_L - X_C = 0$$

ومن ثَمَّ:

$$Z = R.$$

لإيجاد القيمة العظمى لشدة التيار، علينا قسمة القيمة العظمى لفرق الجهد على R:

$$I = \frac{28\,\text{V}}{440\,\Omega}.$$

ولأقرب منزلتين عشريتين، فإن I يساوي $0.06\,\text{A}$.

مثال ٣: تحديد سعة دائرة تهتز بتردُّد الرنين

تحتوي دائرة كهربية على مكثِّف وملف حث موصلَيْن على التوالي، تردُّد الرنين للدائرة 575 kHz. قيمة معامل حث الدائرة 1.25 H. ما سعة المكثِّف؟ أوجد إجابتك بالصيغة العلمية لأقرب منزلتين عشريتين.

الحل

ترتبط سعة المكثِّف بتردُّد رنين الدائرة، ويمكن الحصول عليه من خلال الصيغة:

$$2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

طبقًا للسؤال، فإن L يساوي 1.25 H، وf يساوي 575 kHz، وهو ما يساوي 5.75×10^5 Hz.

يجب إعادة ترتيب الصيغة لجعل C في طرف بمفرده على النحو الآتي:

$$(2\pi f)^2 = \frac{1}{LC}$$

$$C = \frac{1}{(2\pi f)^2 L}.$$

مثال ٣ (متابعة)

بالتعويض بالقيم المعلومة، نحصل على:

$$C = \frac{1}{(2\pi \times 5.75 \times 10^5\,\text{Hz})^2 \times 1.25\,\text{H}}.$$

بالصيغة العلمية لأقرب منزلتين عشريتين، فإن C يساوي $6.13 \times 10^{-14}\,\text{F}$.

مثال ٤: تحديد المفاعلة الحثية لدائرة تهتز بتردُّد الرنين

تحتوي دائرة كهربية على مكثِّف وملف حث موصلَيْن على التوالي، تردُّد الرنين للدائرة 155 kHz. سعة المكثِّف في الدائرة 215 μF. ما المفاعلة الحثية للدائرة؟ أوجد الإجابة بالصيغة العلمية لأقرب منزلتين عشريتين.

الحل

يمكن إيجاد المفاعلة الحثية للدائرة من خلال الصيغة:

$$X_L = 2\pi f L,$$

طبقًا للسؤال، فإن f يساوي 155 kHz، وهو ما يساوي 1.55×10^5 Hz، وL معامل حث ملف الحث.

لم تُذكَر قيمة L في السؤال. ولكن يمكن إيجادها باستخدام تردُّد رنين الدائرة، الذي يُعطى بالصيغة:

$$2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

طبقًا للسؤال، فإن C يساوي 215 μF، وهو ما يساوي 2.15×10^{-4} F.

مثال ٤ (متابعة)

يجب إعادة ترتيب صيغة تردُّد الرنين لجعل L في طرف بمفرده على النحو الآتي:

$$(2\pi f)^2 = \frac{1}{LC}$$
$$L = \frac{1}{(2\pi f)^2 C}.$$

بالتعويض بالقيم المعلومة، نحصل على:

$$L = \frac{1}{(2\pi \times 1.55 \times 10^5\ \text{Hz})^2 \times 2.15 \times 10^{-4}\ \text{F}}$$
$$L \approx 4.9 \times 10^{-9}\ \text{H}.$$

يمكننا التعويض بهذه القيمة في:

$$X_L = 2\pi f L.$$

بالصيغة العلمية لأقرب منزلتين عشريتين، فإن X_L يساوي $4.78 \times 10^{-3}\ \Omega$.

مثال ٤ (متابعة)

يمكن حل هذا السؤال أيضًا بتذكُّر أن المفاعلتين الحثية والسعوية تتساويان عند تردُّد الرنين؛ ومن ثَمَّ، كان من الممكن حساب المفاعلة السعوية بدلًا من المفاعلة الحثية. ويمكن حساب المفاعلة السعوية ببساطة من تردُّد الدائرة وسعتها عن طريق إعادة ترتيب الصيغة:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C},$$

وقد أُعطينا قيمتَي f وC في السؤال.

النقاط الرئيسية

- تردُّد رنين دائرة تيار متردِّد تحتوي على مقاومة وملف حث ومكثِّف كلٌّ منها موصَّل على التوالي هو التردُّد الذي يؤدِّي فرق الجهد المتردِّد المطبَّق عنده إلى قيمة عظمى للتيار.
- عند تردُّد رنين دائرة تيار متردِّد، تكون معاوقة الدائرة مساوية لمقاومة الدائرة.
- يمكن حساب تردُّد الرنين، f، لدائرة تيار متردِّد من خلال الصيغة:

$$2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

حيث L معامل حث الدائرة، وC سعة الدائرة.