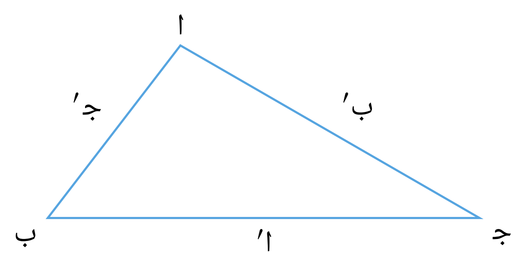
شارح: تطبيقات على قانون الجيب وقانون جيب التمام

في هذا الشارح، سوف نتعلَّم كيف نستخدم قانون الجيب وقانون جيب التمام لحل مسائل من الحياة اليومية.

تطبيقات هذين القانونين واسعة النطاق. يمكن تطبيقهما على مسائل في مجال الهندسة لحساب المسافات أو قياسات زوايا الارتفاع؛ عند بناء الجسور أو أعمدة الهواتف على سبيل المثال. في مجال الملاحة، يمكن للطيارين أو البحَّارة استخدام هذه القوانين لحساب المسافات أو قياسات زوايا الاتجاهات التي يجب أن يسلكوها للوصول إلى وجهتهم.

هيا نبدأ بتذكُّر هذين القانونين. انظر إلى المثلث ابج، وأطوال أضلاعه المناظرة ا′، ب′، ج′.



تعريف: قانون الجيوب

في المثلث ابج، كما هو موضَّح سابقًا، ينص قانون الجيوب على أن:

$$\frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ج}'}{\text{جا ج}}.$$

وينطبق الأمر أيضًا على المقلوب:

$$\frac{\text{جا ا}}{\text{ا}'} = \frac{\text{جا ب}}{\text{ب}'} = \frac{\text{جا ج}}{\text{ج}'}.$$

يمكننا إدراك الحاجة إلى قانون الجيوب عندما تتكوَّن المُعطيات من أزواج متقابلة من أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا في مثلث غير قائم الزاوية. عمليًّا، لا نستخدم عادةً سوى جزأين من النسبة في العمليات الحسابية.

تعريف: قانون جيوب التمام

في المثلث ابج، كما هو موضَّح سابقًا، ينص قانون جيوب التمام على أن:

$$\text{ا}'^{٢} = \text{ب}'^{٢} + \text{ج}'^{٢} - ٢\text{ب}'\text{ج}' \text{ جتا ا}.$$

يمكن إعادة ترتيب قانون جيوب التمام إلى الصورة:

$$\text{جتا ا} = \frac{\text{ب}'^{\text{٢}} + \text{ج}'^{\text{٢}} - \text{ا}'^{\text{٢}}}{\text{٢ب}'\text{ج}'}.$$

يمكننا إدراك الحاجة إلى استخدام قانون جيوب التمام في حالتين:

- نستخدم الصورة الأولى عندما نعلم طولَي ضلعَين في مثلث غير قائم الزاوية وقياسَ الزاوية المحصورة بينهما، ونريد حساب طول الضلع الثالث.
- نستخدم الصورة المُعاد ترتيبها عندما نعلم أطوال الأضلاع الثلاثة في مثلث غير قائم الزاوية، ونريد حساب قياس أي زاوية من زواياه.

من الأفضل ألا تهتم كثيرًا بشأن الحروف نفسها، بل بما تمثِّله هذه الحروف بدلالة موضعها بالنسبة إلى طول الضلع أو قياس الزاوية الذي نريد حسابه. على سبيل المثال، في الصيغة الثانية من قانون جيوب التمام، الحرفان ب′، ج′ يمثِّلان طولَي الضلعين اللذين يحصران الزاوية التي نحسب قياسها، ويمثِّل ا′ طول الضلع المقابل.

$$\text{جتا ا} = \frac{\text{ب}'^{\text{٢}} + \text{ج}'^{\text{٢}} - \overbrace{\text{ا}'^{\text{٢}}}^{\text{الضلع المقابل للزاوية}}}{\text{٢}\underbrace{\text{ب}'\text{ج}'}_{\text{الضلعان اللذان يحصران الزاوية}}}$$

إذا تذكَّرنا هذا الهيكل، يمكننا التعويض بالقيم ذات الصلة في قانون الجيب وقانون جيب التمام دون الحاجة إلى تعريف الحروف ا′، ب′، ج′ في كل مسألة.

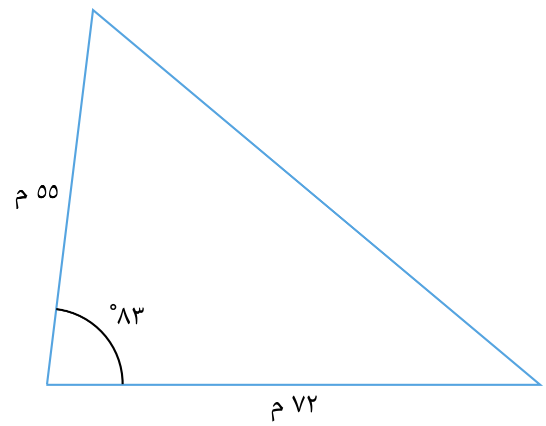
يجب أن نكون على دراية بالفعل بتطبيق كل قانون من هذين القانونين على المسائل الرياضية؛ لا سيما عندما يكون لدينا شكل مُعطى. يركِّز هذا الشارح على استخدام هذه المهارات لحل المسائل التي تتضمَّن تطبيقات حياتية. سيكون من الضروري غالبًا البدء برسم شكل من الوصف الكلامي، كما سنرى في المثال الأول.

مثال ١: استخدام قانون جيوب التمام لحساب طول مجهول في مثلث في مسألة كلامية

أراد مزارع وضع سياج حول قطعة أرض مثلثة الشكل. طول ضلعَي السياج ٧٢ مترًا و٥٥ مترًا، وقياس الزاوية بينهما يساوي ٨٣°. أوجد محيط السياج لأقرب متر.

الحل

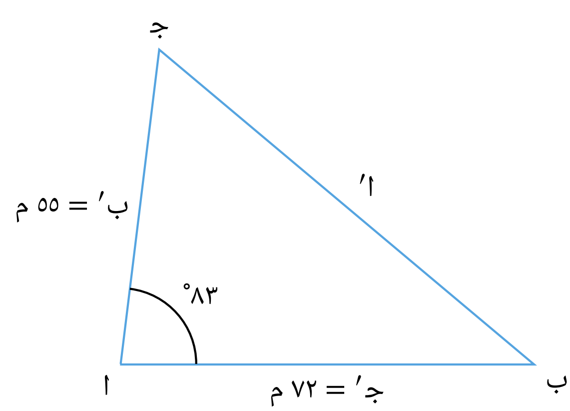
نبدأ برسم قطعة الأرض المثلثة الشكل باستخدام المعلومات المُعطاة، كما هو موضَّح في الآتي (ليس مُطابقًا للمقياس المذكور).



لإيجاد محيط السياج، علينا حساب طول الضلع الثالث للمثلث. نُحدِّد من الشكل الموضَّح مُعطياتنا من طولَي الضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما. يمكننا إذن حساب طول الضلع الثالث بتطبيق قانون جيوب التمام الآتي:

$$\text{ا}'^{٢} = \text{ب}'^{٢} + \text{جـ}'^{٢} - ٢\text{ب}'\text{جـ}' \text{ جتا ا}.$$

قد يكون من المفيد تسمية الأضلاع والزوايا في المثلث باستخدام الحروف المناظِرة لتلك المستخدَمة في قانون جيوب التمام، كما هو موضَّح في الآتي:



لكن هذا ليس ضروريًا إذا كنا على دراية بهيكل قانون جيوب التمام. إذا تذكَّرنا أن ب′، جـ′ يمثِّلان طولَي الضلعين المعلومين، ويمثِّل ا الزاوية المحصورة بينهما، فيمكننا التعويض بالقيم المُعطاة مباشرةً في قانون جيوب التمام دون أن نُسمِّي بوضوح الأضلاع والزوايا باستخدام الحروف.

بالتعويض بالقيم ب′ = ٥٥، جـ′ = ٧٢، ق∠ا = ٨٣° في قانون جيوب التمام، نحصل على:

$$\text{ا}'^{٢} = ٥٥^{٢} + ٧٢^{٢} - (٢ \times ٥٥ \times ٧٢) \text{ جتا } ٨٣°.$$

بحساب قيمة ذلك والتبسيط، نحصل على:

$$\text{ا}'^{٢} = ٣٠٢٥ + ٥١٨٤ - ٧٩٢٠ \text{ جتا } ٨٣^\circ$$
$$= ٧٢٤٣{,}٧٩٤\ldots.$$

نُوجِد قيمة ا′ بأخذ الجذر التربيعي. يمكننا تجاهل الحل السالب للمعادلة؛ حيث نَحُل لإيجاد طول:

$$\text{ا}' = \sqrt{٧٢٤٣{,}٧٩٤\ldots} \text{ م}$$
$$= ٨٥{,}١١٠\ldots \text{ م}.$$

وأخيرًا، نتذكَّر أن المطلوب هو حساب محيط المثلث. بجمع أطوال الأضلاع الثلاثة وتقريبها لأقرب متر، كما هو مطلوب في السؤال، نحصل على الآتي:

$$\text{المحيط} = ٧٢ + ٥٥ + (٨٥{,}١١٠\ldots)$$
$$= ٢١٢{,}١١٠\ldots$$
$$\approx ٢١٢.$$

محيط السياج، لأقرب متر، يساوي٢١٢ مترًا.

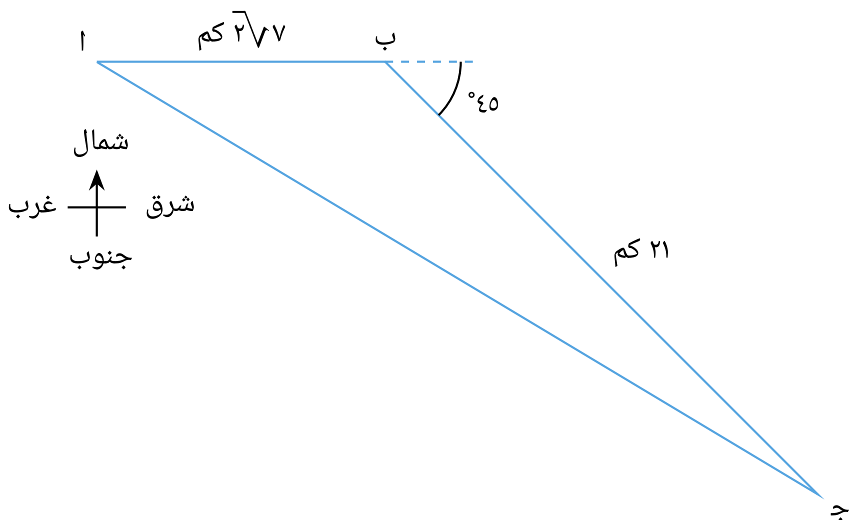
المسائل الأخرى التي يمكننا تطبيق قانون الجيوب وقانون جيوب التمام عليها، قد تتخذ صورة مسائل تتضمَّن مسافات مقطوعة. قد يكون المُعطى وصفًا كلاميًا يتضمَّن حركة جسم أو مواضع عدة أجسام بعضها بالنسبة إلى بعض، ومطلوبًا منا حساب المسافة بين نقطتين أو قياس زاوية. في المسائل الأكثر تعقيدًا، قد يُطلَب منا تطبيق كلٍّ من قانون الجيوب وقانون جيوب التمام. نتناول الآن مثالًا على ذلك.

مثال ٢: تحديد مقدار إزاحة الجسم واتجاهها باستخدام قانون الجيوب وقانون جيوب التمام

قطع شخص بالدرَّاجة مسافة $٧\sqrt{٢}$ كم في اتجاه الشرق، ثم قطع مسافة ٢١ كم أخرى في اتجاه ٤٥° جنوب شرق. أوجد مقدار واتجاه الإزاحة لأقرب دقيقة.

الحل

نبدأ برسم المسافة التي قطعها هذا الشخص، واعتبار اتجاه الشمال هو الاتجاه الرأسي على الشاشة. يُشار إلى نقطة بدايته على الرسم بالحرف ا، ويمثِّل الخط المتقطِّع الاستمرار في الاتجاه شرقًا للمساعدة في رسم خط الجزء الثاني من الرحلة. الزاوية ٤٥° في اتجاه جنوب شرق هي زاوية قياسها ٤٥° لأسفل (في اتجاه دوران عقارب الساعة) مقيسة من هذا الخط.



المطلوب منا هو حساب مقدار الإزاحة واتجاهها. المقدار هو طول الخط الواصل بين نقطة البداية ا ونقطة النهاية جـ. اتجاه إزاحة النقطة جـ من النقطة ا هو اتجاه جنوب شرق، وقياس هذه الزاوية هو قياس الزاوية باجـ.

هيا نفكِّر في المثلث ابجـ، الذي نعلم فيه طولَي ضلعين. يمكننا حساب قياس الزاوية المحصورة بينهما، وهي الزاوية ابجـ بتذكُّر أن مجموع قياسات الزوايا الواقعة على خط مستقيم يساوي ١٨٠°. بطرح ٤٥° من ١٨٠°، نحصل على:

$$\text{ق}\angle\text{ابجـ} = ١٨٠° - ٤٥° = ١٣٥°.$$

وبما أننا نعرف الآن طولَي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما، إذن يمكننا تطبيق قانون جيوب التمام لحساب طول الضلع الثالث:

$$\text{اجـ}^{٢} = \text{اب}^{٢} + \text{بجـ}^{٢} - (٢ \times \text{اب} \times \text{بجـ} \times \text{جتا ابجـ}).$$

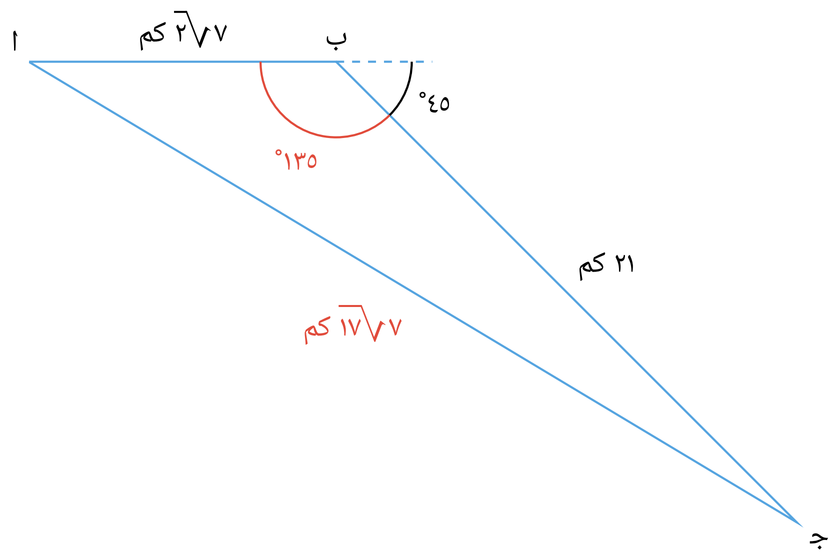
بالتعويض بقيم اب = ٧$\sqrt{٢}$، بجـ = ٢١، ق$\angle$ابجـ = ١٣٥°، نحصل على:

$$\text{اجـ}^{٢} = \left(٧\sqrt{٢}\right)^{٢} + ٢١^{٢} - \left(٢ \times ٧\sqrt{٢} \times ٢١ \times \text{جتا } ١٣٥°\right)$$
$$= ٨٣٣.$$

نُوجِد قيمة اجـ بأخذ الجذر التربيعي:

$$\text{اجـ} = \sqrt{٨٣٣}\text{ كم}$$
$$= ٧\sqrt{١٧}\text{ كم}.$$

نُضيف المعلومات التي حسبناها إلى الشكل.



لحساب قياس الزاوية ب‌اج، يمكننا الاختيار من الطريقتين:

- يمكننا تطبيق قانون جيوب التمام باستخدام أطوال الأضلاع الثلاثة المعلومة.
- يمكننا تطبيق قانون الجيوب باستخدام طول الضلع الذي يساوي ٢١ كم، وقياس الزاوية المقابلة له؛ وهما الموضَّحان باللون الأحمر.

سنطبِّق قانون الجيوب باستخدام الصورة التي بها جيوب الزوايا في البسط:

$$\frac{\text{جا ا}}{\text{ا}'} = \frac{\text{جا ب}}{\text{ب}'}.$$

بالتعويض بقيم ا′ = ٢١، ب′ = ٧√١٧، وق∠ب = ١٣٥°، نحصل على:

$$\frac{\text{جا ا}}{٢١} = \frac{\text{جا }١٣٥^\circ}{٧\sqrt{١٧}}.$$

وبضرب طرفَي هذه المعادلة في ٢١، ينتج:

$$\text{جا ا} = \frac{٢١\text{ جا }١٣٥^\circ}{٧\sqrt{١٧}}.$$

نُوجِد قيمة ا بتطبيق دالة الجيب العكسية:

$$ا = جا^{-١} \left(\frac{٢١ \text{ جا } ١٣٥^\circ}{٧\sqrt{١٧}} \right)$$

$$= ...٣٠,٩٦٣^\circ.$$

تذكَّر أنه مطلوب منا تقريب الناتج لأقرب دقيقة، إذن، باستخدام الآلة الحاسبة لتحويل الناتج من وحدة الدرجات إلى وحدة الدرجات والدقائق، نحصل على $٣٠^\circ\ ٥٨'$.

مقدار الإزاحة يساوي $٧\sqrt{١٧}$ كم، والاتجاه، لأقرب دقيقة، يساوي $٣٠^\circ\ ٥٨'$ جنوب شرق.

لقد رأينا في المثال السابق أنه إذا كانت لدينا معلومات كافية عن المثلث، يمكننا الاختيار من بين الطريقتين. وبالطبع، سيؤدِّي تطبيق قانون الجيوب وقانون جيوب التمام إلى الحصول على الناتج نفسه، ولن تكون أيٌّ منهما بشكل خاص أكثر كفاءةً من الأخرى. من الممكن أيضًا تطبيق قانون الجيوب أو قانون جيوب التمام عدة مرات في المسألة نفسها.

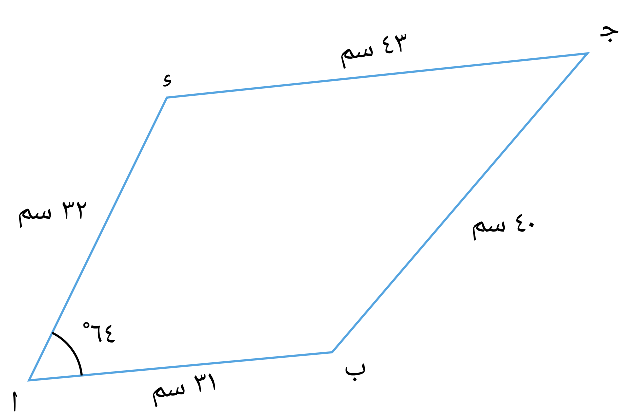
يمكن أيضًا تطبيق قانون الجيوب وقانون جيوب التمام على مسائل تتضمَّن أشكالًا هندسية أخرى؛ مثل الأشكال الرباعية؛ حيث يمكن تقسيمها إلى مثلثات. نتناول الآن مثالًا على ذلك نُطبِّق فيه قانون جيوب التمام مرتين لحساب قياس زاوية في شكل رباعي.

مثال ٣: استخدام قانون جيوب التمام لإيجاد قياس زاوية في شكل رباعي

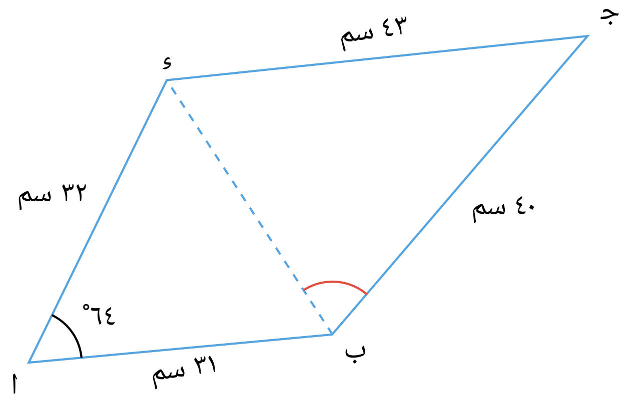
ابجء شكل رباعي، فيه اب = ٣١ سم، بج = ٤٠ سم، جء = ٤٣ سم، ءا = ٣٢ سم، ق∠ا = ٦٤°. أوجد ق∠جبء لأقرب درجة.

الحل

نبدأ برسم الشكل الرباعي ابجء، كما هو موضَّح في الآتي (ليس مُطابقًا للمقياس المذكور).



يمكننا أيضًا رسم القطر بء وتحديد الزاوية المطلوب منا حساب قياسها؛ وهي الزاوية جبء.



القطر ب‌ء يقسم الشكل الرباعي إلى مثلثين. نرى أن الزاوية ج‌ب‌ء تمثِّل إحدى الزوايا في المثلث ب‌ج‌ء، الذي نعلم فيه طولَي ضلعين. إذا عرفنا طول الضلع الثالث، ب‌ء، يمكننا تطبيق قانون جيوب التمام لحساب قياس أي زاوية في هذا المثلث.

الضلع ب‌ء مشترك مع المثلث الآخر في الشكل، وهو المثلث اب‌ء؛ لذلك هيا الآن نتناول هذا المثلث. نعلم طولَي الضلعين (اء، اب) وقياس الزاوية المحصورة بينهما، وبذلك يمكننا تطبيق قانون جيوب التمام لحساب طول الضلع الثالث. بالنسبة إلى هذا المثلث، ينص قانون جيوب التمام على أن:

ب‌ء^{٢} = اب^{٢} + اء^{٢} − (٢ × اب × اء × جتا ا) .

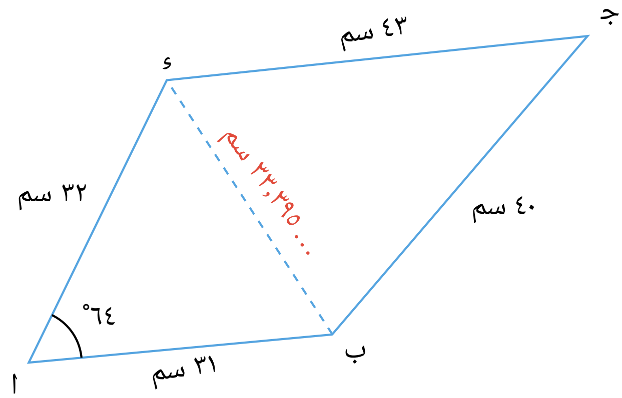
بالتعويض بقيم اب = ٣١، اء = ٣٢، وق∠ا = ٦٤°، نحصل على:

ب‌ء^{٢} = ٣١^{٢} + ٣٢^{٢} − (٢ × ٣١ × ٣٢ × جتا ٦٤°)
= ١٩٨٥ − ١٩٨٤ جتا ٦٤°
= ١١١٥٫٢٧١ … .

نحسب الطول ب‌ء بأخذ الجذر التربيعي، وتجاهل الحل السالب؛ حيث ب‌ء يمثِّل طولًا:

ب‌ء = $\sqrt{(١١١٥٫٢٧١ …)}$ سم
= ٣٣٫٣٩٥ … سم.

نُضيف طول ب‌ء إلى الشكل الموضَّح.



أصبحنا نعرف الآن جميع أطوال الأضلاع الثلاثة في المثلث ب‌جء، وبذلك يمكننا حساب قياس أي زاوية. تذكَّر الصورة المُعاد ترتيبها لقانون جيوب التمام:

$$\text{جتا ا} = \frac{\text{ب}'^2 + \text{جـ}'^2 - \text{ا}'^2}{2\,\text{ب}'\text{جـ}'}،$$

حيث ب′، جـ′ هما طولا الضلعين اللذين يحصران الزاوية التي نريد حسابها، ا′ هو طول الضلع المقابل لها. في هذا الشكل، الضلعان اللذان يحصران الزاوية ب طولاهما ٤٠ سم، ٣٣٫٣٩٥ ... سم، والضلع المقابل طوله ٤٣ سم. بالتعويض بهذه القيم في قانون جيوب التمام، نحصل على:

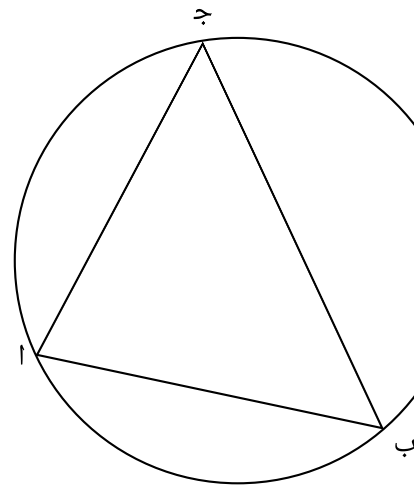
$$\text{جتا (جبء)} = \frac{٤٠^٢ + (٣٣٫٣٩٥\ldots)^٢ - ٤٣^٢}{٢ \times ٤٠ \times (٣٣٫٣٩٥\ldots)}$$
$$= ٠٫٣٢٤\ldots.$$

نُوجِد قياس الزاوية جبء بتطبيق دالة جيب التمام العكسية:

$$\text{ق}\angle\text{جبء} = \text{جتا}^{-١}(٠٫٣٢٤\ldots)$$
$$= ٧١٫٠٨٠\ldots°$$
$$\approx ٧١°.$$

قياس الزاوية جبء، لأقرب درجة، يساوي ٧١°.

رأينا الآن أمثلة على حساب كلٍّ من أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا المجهولة في مسائل تتضمَّن مثلثات وأشكالًا رباعية، باستخدام قانون الجيوب وقانون جيوب التمام. هناك تطبيق آخر لقانون الجيوب، ويتمثَّل في ارتباطه بقطر الدائرة المارة برءوس المثلث. تذكَّر أن الدائرة المارة برءوس المثلث هي الدائرة التي تمر بجميع رءوس المثلث الثلاثة، كما هو موضَّح في الشكل الآتي:



تعريف: قانون الجيب وعلاقته بالدائرة المارة برءوس المضلع

لأي مثلث ابج، قطر الدائرة المارة برءوسه يساوي نسبة قانون الجيوب:

$$\frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ج}'}{\text{جا ج}} = ٢\text{نق}.$$

نرى الآن كيف يمكننا تطبيق هذه النتيجة لحساب مساحة دائرة مارة برءوس مضلع بمعلومية قياس إحدى زوايا المثلث وطول ضلعها المقابل.

مثال ٤: إيجاد مساحة دائرة مارة برءوس مثلث بمعلومية قياس زاوية وطول الضلع المقابل لها

ابج مثلث، فيه $\text{ق}\angle\text{ا} = ١٥٢^\circ$، $\text{ب ج} = ١١$ سم. أوجد مساحة الدائرة المارة برءوس المثلث لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل

نتذكَّر أولًا أن الدائرة المارة برءوس المثلث هي الدائرة التي تمر بجميع رءوس المثلث الثلاثة. لحساب مساحة أي دائرة نستخدم الصيغة $\text{م} = \pi \text{نق}^٢$؛ لذا، علينا التفكير في كيفية تحديد نصف قطر هذه الدائرة.

تتكوَّن المُعطيات الواردة في السؤال من قياس زاوية وطول ضلعها المقابل. نعرف ذلك لأن الطول المُعطى هو لضلع يصل بين الرأسين ب، ج، سيكون الضلعَ المقابلَ للزاوية الثالثة في المثلث؛ أي الزاوية ا. هناك طريقة بديلة للإشارة إلى طول الضلع هذا بالرمز $\text{ا}'$.

لعلنا نتذكَّر العلاقة بين نسبة قانون الجيوب ونصف قطر الدائرة المارة برءوس المثلث:

$$\frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ج}'}{\text{جا ج}} = ٢\text{نق}.$$

بالتعويض بـ أ′ = ١١، ق∠أ = ١٥٢° في الجزء الأول من هذه النسبة، مع تجاهل الجزأين غير المطلوبين في المنتصف، نحصل على:

$$\frac{١١}{\text{جا } ١٥٢°} = ٢\text{نق}.$$

نَحُل هذه المعادلة لإيجاد نصف قطر الدائرة المارة برءوس المثلث:

$$\text{نق} = \frac{١١}{٢ \text{ جا } ١٥٢°}$$
$$= ١١{,}٧١٥ \ldots \text{ سم}.$$

يمكننا الآن حساب مساحة الدائرة المارة برءوس المثلث:

$$\text{المساحة} = \pi \text{نق}^٢$$
$$= \pi \times (١١{,}٧١٥)^٢$$
$$= ٤٣١{,}١٧٨ \ldots$$
$$\approx ٤٣١.$$

مساحة الدائرة المارة بروس المثلث، لأقرب سنتيمتر مربع، تساوي ٤٣١ سم^٢.

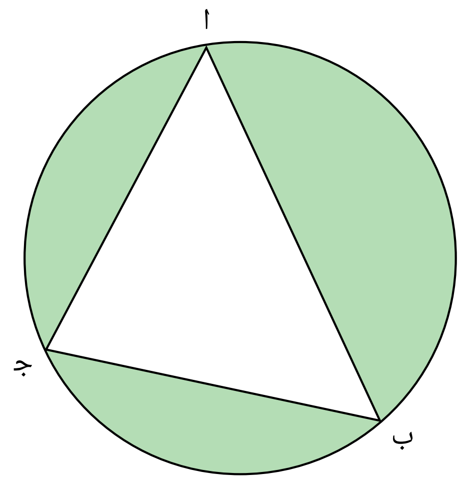
يمكننا أيضًا الجمع بين معرفتنا بقانون الجيوب وقانون جيوب التمام والنتائج الأخرى المتعلِّقة بالمثلثات غير القائمة. علينا تذكُّر الصيغة المثلثية لمساحة المثلث:

$$\text{المساحة} = \frac{١}{٢} \times \text{أ}' \times \text{ب}' \times \text{جا ج},$$

حيث أ′، ب′ يمثِّلان طولَي ضلعين في المثلث، ويمثِّل ج قياس الزاوية المحصورة بينهما. في المثال الأخير، سنرى كيف يمكننا تطبيق قانون الجيوب والصيغة المثلثية لمساحة المثلث على مسألة تتضمَّن مساحة.

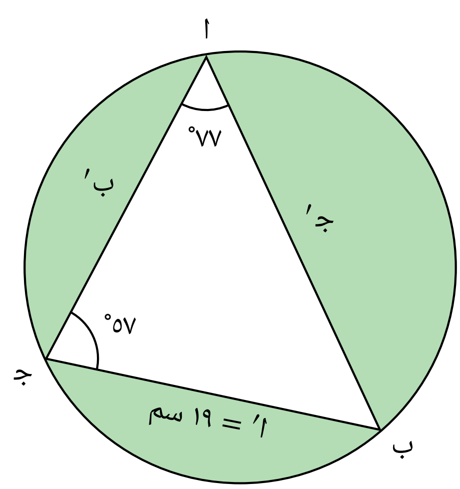
مثال ٥: استخدام قانون الجيوب والصيغة المثلثية لمساحة المثلثات لحساب مساحات القطع الدائرية

أوجد مساحة الجزء الأخضر، إذا كان ق∠جاب = ٧٧°، ق∠بجا = ٥٧°، جب = ١٩ سم. قرِّب إجابتك لأقرب سنتيمتر مربع.



الحل

نبدأ بإضافة المُعطيات الواردة في السؤال إلى الشكل. قد يكون من المفيد أيضًا تسمية الأضلاع باستخدام الحروف ا′، ب′، ج′.



يمكن حساب مساحة المنطقة المظلَّلة باعتبارها مساحة المثلث ابج مطروحة من مساحة الدائرة:

المساحة المظلَّلة = مساحة الدائرة − مساحة المثلث ابج.

لعلنا نتذكَّر الصيغة المثلثية لمساحة المثلث، باستخدام طولَي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما:

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ا′ × ب′ × جا ج.

لكي نحسب مساحة المثلث ا ب جـ، علينا أولًا حساب طول ضلع ب′. نعرف بالفعل طولَ ضلع في هذا المثلث (الضلع ا′) وقياس الزاوية المقابلة له (الزاوية ا). يمكننا تحديد قياس الزاوية المقابلة للضلع ب′ بطرح قياسَي الزاويتين الأخريين في المثلث من ١٨٠°:

$$\text{ق}\angle\text{ب} = ١٨٠° - ٧٧° - ٥٧° = ٤٦°.$$

وبما أن المُعطيات التي نتعامل معها تتكوَّن من أزواج من أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا المقابلة لها، إذن ندرك الحاجة إلى استخدام قانون الجيب:

$$\frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}}.$$

بالتعويض بقيم ا′ = ١٩، ق∠ا = ٧٧°، ق∠ب = ٤٦°، نحصل على:

$$\frac{\text{ب}'}{\text{جا }٤٦°} = \frac{١٩}{\text{جا }٧٧°}.$$

نَحُل هذه المعادلة لإيجاد قيمة ب′ بضرب الطرفين في جا ٤٦°:

$$\begin{aligned}\text{ب}' &= \frac{١٩ \text{ جا } ٤٦°}{\text{جا }٧٧°}\\ &= ١٤{,}٠٢٦ \ldots \text{ سم}.\end{aligned}$$

يمكننا الآن التعويض بقيم ا′ = ١٩، ب′ = ... ١٤,٠٢٦، ق∠جـ = ٥٧° في الصيغة المثلثية لمساحة المثلث:

$$\begin{aligned}\text{مساحة المثلث ا ب جـ} &= \frac{١}{٢} \times ١٩ \times (١٤{,}٠٢٦ \ldots) \times \text{جا }٥٧°\\ &= ١١١{,}٧٥٨ \ldots \text{ سم}^٢.\end{aligned}$$

لإيجاد مساحة الدائرة، علينا تحديد نصف قطرها. هذه الدائرة هي في الواقع دائرة مارة برءوس المثلث ا ب جـ؛ فهي تمر بجميع رءوس المثلث الثلاثة. نتذكَّر العلاقة بين نسبة قانون الجيوب ونصف قطر الدائرة المارة برءوس المثلث:

$$\frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}} = ٢\text{نق}.$$

باستخدام طول الضلع ا′ وقياس الزاوية ا، يمكننا تكوين معادلة:

$$\frac{١٩}{\text{جا }٧٧°} = ٢\text{نق}.$$

بإيجاد قيمة نق، نحصل على:

$$\text{نق} = \frac{١٩}{٢ \text{ جا } ٧٧^\circ} = \dots ٩٫٧٤٩ \text{ سم}.$$

ومن ثَمَّ، تكون مساحة الدائرة كالآتي:

$$\begin{aligned} \text{مساحة الدائرة} &= \pi \times (\dots ٩٫٧٤٩)^{٢} \\ &= \dots ٢٩٨٫٦٤٠ \text{ سم}^{٢}. \end{aligned}$$

وأخيرًا، نطرح مساحة المثلث ا ب ج من مساحة الدائرة المارة برءوس المثلث:

$$\begin{aligned} \text{المساحة المظلَّلة} &= \text{مساحة الدائرة} - \text{مساحة المثلث ا ب ج} \\ &= (\dots ٢٩٨٫٦٤٠) - (\dots ١١١٫٧٥٨) \\ &= \dots ١٨٦٫٨٨٢ \\ &\approx ١٨٧. \end{aligned}$$

المساحة المظلَّلة، لأقرب سنتيمتر مربع، تساوي ١٨٧ سم^{٢}.

هيا نختتم بتلخيص بعض النقاط الرئيسية المستخلَصة من هذا الشارح.

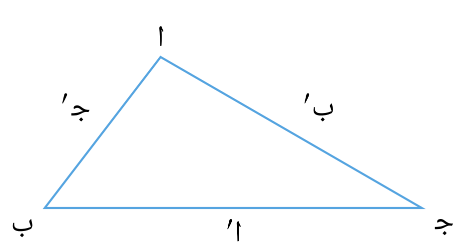
النقاط الرئيسية

- في المثلث ا ب ج، كما هو موضَّح في الشكل الآتي، ينص قانون الجيوب على أن:

$$\frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ج}'}{\text{جا ج}}.$$

وينص قانون جيوب التمام على أن:

$$\text{ا}'^{٢} = \text{ب}'^{٢} + \text{ج}'^{٢} - ٢\text{ب}'\text{ج}' \text{ جتا ا}.$$



- يمكن تطبيق قانون الجيوب وقانون جيوب التمام على المسائل في السياقات الحياتية لحساب الأطوال وقياسات الزوايا المجهولة في المثلثات غير القائمة. قد تتخذ هذه الأسئلة صورًا متنوعة؛ منها المسائل الكلامية، والمسائل التي تتضمَّن الاتجاهات، والمسائل التي تتضمَّن أشكالًا هندسية أخرى.
- إذا لم يكن لدينا شكل مُعطى، يجب أن تكون الخطوة الأولى هي رسم شكل باستخدام جميع المعلومات المُعطاة في السؤال.
- القانون الذي نستخدمه يعتمد على أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا المُعطاة. وقد يكون بإمكاننا الاختيار من الطريقتين أو قد نحتاج إلى تطبيق كلٍّ من قانون الجيوب وقانون جيب التمام أو القانون نفسه عدة مرات في المسألة نفسها.
- يمكننا الجمع بين معرفتنا بقانون الجيوب وقانون جيوب التمام والنتائج الهندسية الأخرى؛ مثل الصيغة المثلثية لمساحة المثلث:

$$\text{المساحة} = \frac{١}{٢} \times ا' \times ب' \times \text{جا } ج.$$

- تُوجَد علاقة بين قانون الجيوب وقطر الدائرة المارة برءوس مثلث. لأي مثلث ا ب ج، قطر الدائرة المارة برءوسه يساوي نسبة قانون الجيوب:

$$\frac{ا'}{\text{جا } ا} = \frac{ب'}{\text{جا } ب} = \frac{ج'}{\text{جا } ج} = ٢نق.$$