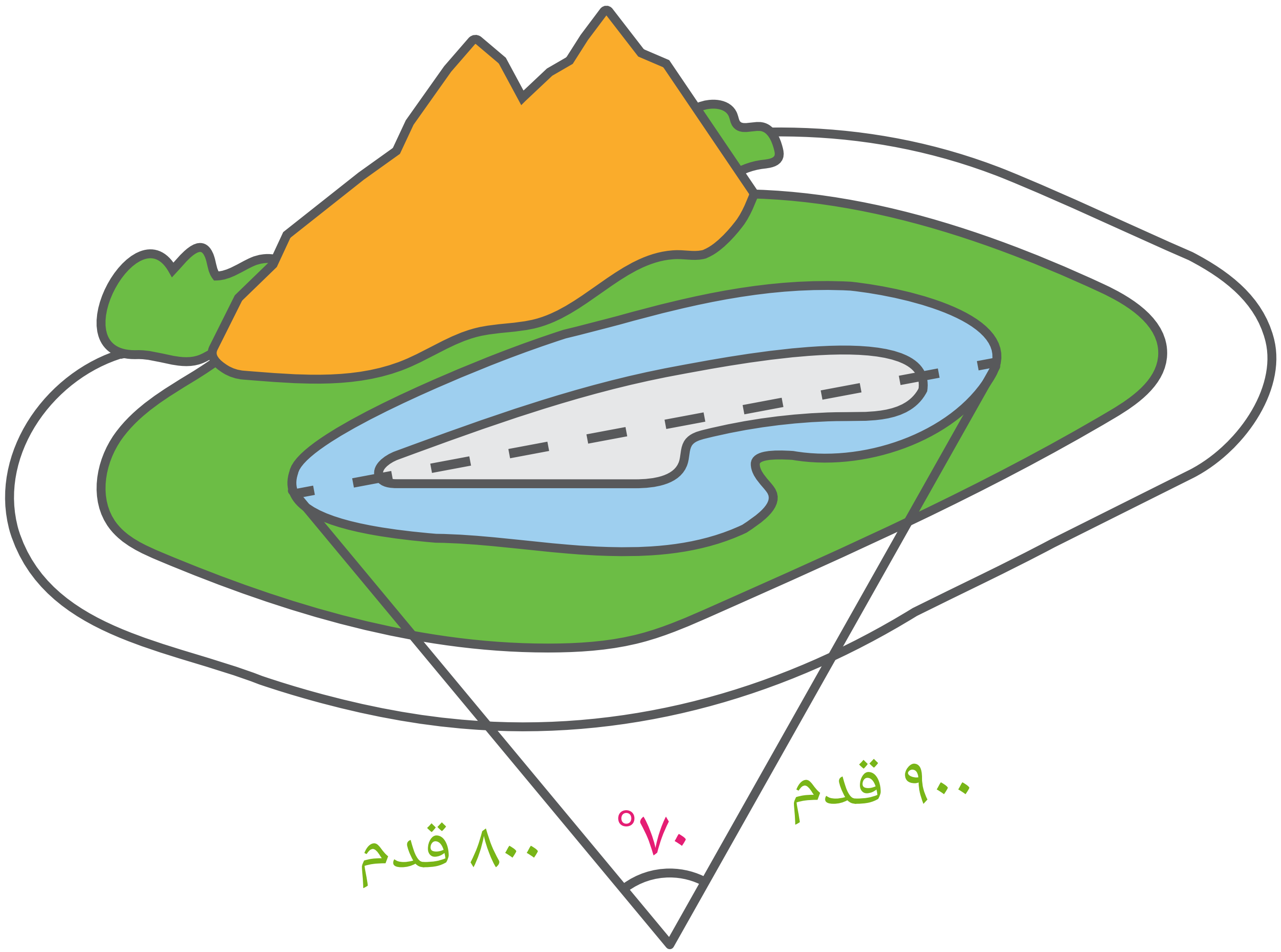
تطبيقات على قانون الجيب وقانون جيب التمام



أهداف الدرس

ستتمكَّن من:

- رسم مخطط يمثِّل مسألة حياتية وتحديد ما إذا كان يُمكن حلُّها باستخدام قانون الجيب، أم بقانون جيب التمام، أم باستخدامهما معًا
- حلُّ مسائل حياتية باستخدام قانون الجيب، أو قانون جيب التمام، أو كليهما معًا، ويتضمَّن ذلك إيجاد الأطوال وقياسات الزوايا المجهولة
- حلُّ المسائل الموصوفة باستخدام الاتجاهات (شمال وجنوب وشرق وغرب) والمسائل المُعطاة في سياق هندسي أشمل (مضمنًا ذلك المسائل التي تتضمن دوائر)؛ وهذا أيضًا يتضمَّن إيجاد مساحة المثلثات أو متوازي الأضلاع

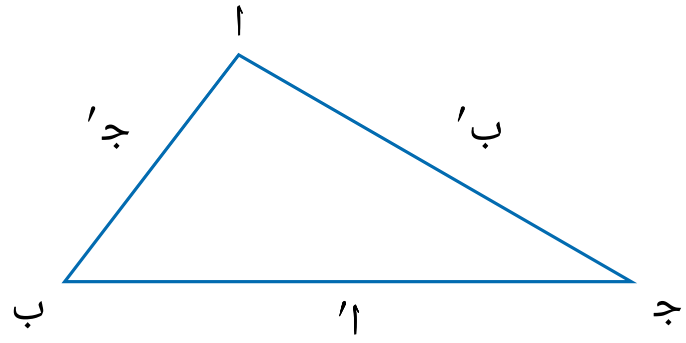
تذكير بقانون الجيوب

في المثلث ا ب ج، ينصُّ قانون الجيوب على أن:

$$\frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ج}'}{\text{جا ج}}.$$

ويَنطبق الأمر أيضًا على المقلوب:

$$\frac{\text{جا ا}}{\text{ا}'} = \frac{\text{جا ب}}{\text{ب}'} = \frac{\text{جا ج}}{\text{ج}'}.$$



يُمكننا إدراك الحاجة إلى قانون الجيوب عندما تتكوَّن المُعطيات من أزواج متقابلة من أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا في مثلث غير قائم الزاوية.

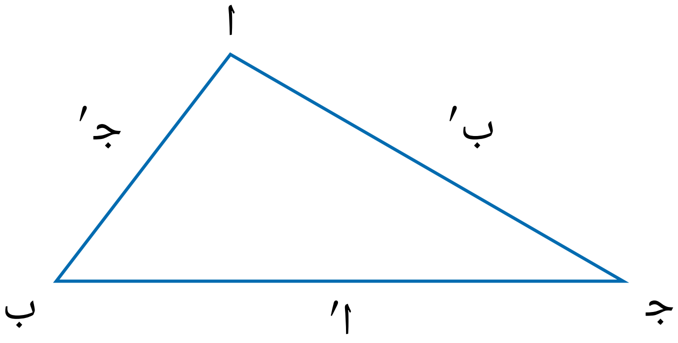
تذكير بقانون جيوب التمام

في المثلث ابج، ينصُّ قانون جيوب التمام على أن:

$$\text{ا}'^{٢} = \text{ب}'^{٢} + \text{ج}'^{٢} - ٢\text{ب}'\text{ج}'\ \text{جتا ا}.$$

يُمكن إعادة ترتيب قانون جيوب التمام إلى الصورة:

$$\text{جتا ا} = \frac{\text{ب}'^{٢} + \text{ج}'^{٢} - \text{ا}'^{٢}}{٢\text{ب}'\text{ج}'}.$$



يُمكننا إدراك الحاجة إلى استخدام قانون جيوب التمام في حالتين:

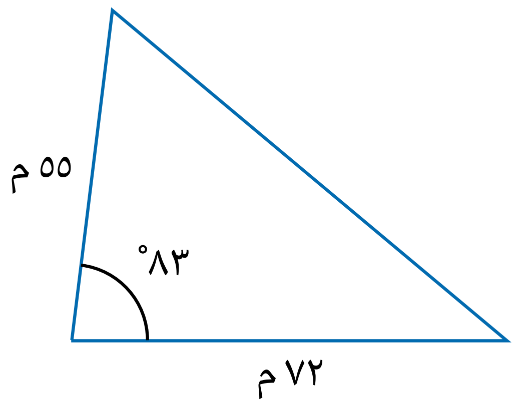
١. عندما نعلم طولَيْ ضلعَيْن في مثلث غير قائم الزاوية وقياسَ الزاوية المحصورة بينهما، ونريد حساب طول الضلع الثالث.
٢. عندما نعلم أطوال الأضلاع الثلاثة في مثلث غير قائم الزاوية، ونريد حساب قياس أيٍّ زاوية من زواياه.

مثال ١: استخدام قانون جيوب التمام لحساب طول مجهول في مثلث في مسألة كلامية

أراد مزارع وضْع سياج حول قطعة أرض مثلثة الشكل. طول ضلعَي السياج ٧٢ مترًا و٥٥ مترًا، وقياس الزاوية بينهما يساوي ٨٣°. أوجد محيط السياج لأقرب متر.

الحل

نبدأ برسم قطعة الأرض المثلثة الشكل باستخدام المعلومات المُعطاة.

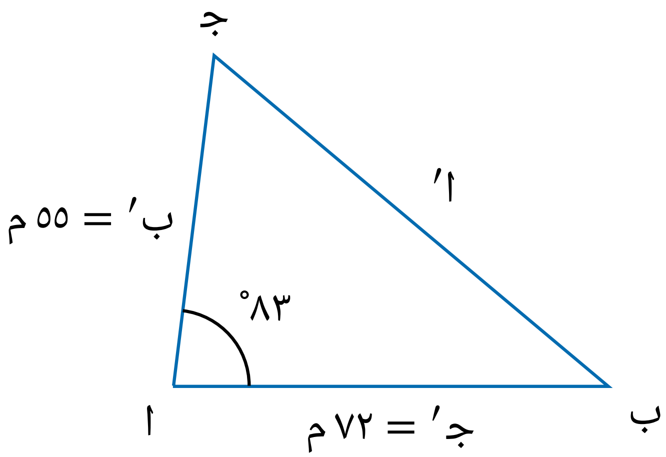


لإيجاد محيط السياج، علينا حساب طول الضلع الثالث للمثلث.

يُمكننا إذن حساب طول الضلع الثالث بتطبيق قانون جيوب التمام.

$$أ'^{٢} = ب'^{٢} + ج'^{٢} - ٢ب'ج' \text{ جتا } أ$$

بعد ذلك، يُمكننا تسمية الأضلاع والزوايا في المثلث باستخدام الحروف المناظِرة لتلك المُستخدَمة في قانون جيوب التمام:



مثال ١ (متابعة)

$أ'^{٢} = ٥٥^{٢} + ٧٢^{٢} - (٢ \times ٥٥ \times ٧٢)$ جتا ٨٣° نعوِّض بالقيم ب′ = ٥٥، جـ′ = ٧٢، ق∠أ = ٨٣° في قانون جيوب التمام.

$أ'^{٢} = ٣٠٢٥ + ٥١٨٤ - ٧٩٢٠$ جتا ٨٣° نحسب قيمة ذلك ونبسِّطه.

$= ٧٢٤٣{,}٧٩٤ \ldots$

$أ' = \sqrt{٧٢٤٣{,}٧٩٤ \ldots}$ م نأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة.

$= ٨٥{,}١١٠ \ldots$ م ومن ثَمَّ نُوجِد قيمة أ′.

المحيط $= ٧٢ + ٥٥ + (٨٥{,}١١٠ \ldots)$ نُوجِد المحيط بجمع أطوال الأضلاع الثلاثة.

$= ٢١٢{,}١١٠ \ldots$ وأخيرًا: نقرِّب الإجابة لأقرب متر.

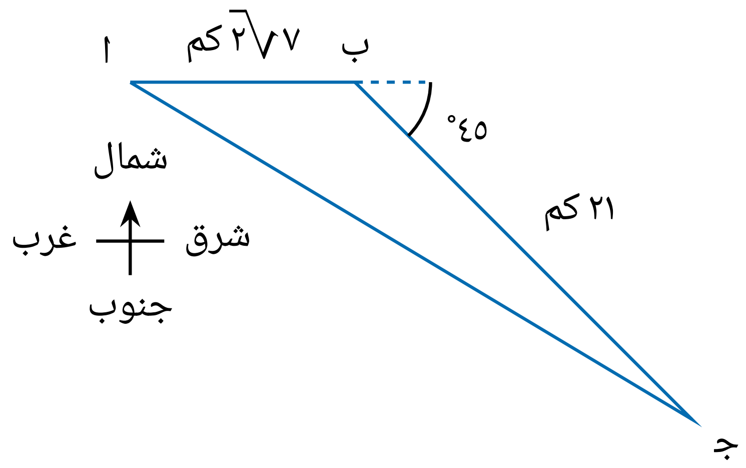
≈ ٢١٢

مثال ٢: تحديد مقدار إزاحة الجسم واتجاهها باستخدام قانون الجيوب وقانون جيوب التمام

قطع شخص بالدرَّاجة مسافة $٧\sqrt{٢}$ كم في اتجاه الشرق، ثم قطع مسافة ٢١ كم أخرى في اتجاه ٤٥° جنوب شرق. أوجد مقدار واتجاه الإزاحة، لأقرب دقيقة.

الحل

نبدأ برسم المسافة التي قطعها هذا الشخص.



بعد ذلك، نحسب قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين المعلوم طولاهما لدينا.

$$\text{ق}\angle\text{ابج} = ١٨٠^\circ - ٤٥^\circ = ١٣٥^\circ$$

نطبِّق قانون جيوب التمام لحساب طول الضلع الثالث.

$$\text{اج}^{٢} = \text{اب}^{٢} + \text{ب ج}^{٢} - (٢ \times \text{اب} \times \text{ب ج} \times \text{جتا اب ج})$$

نعوِّض بالقيم اب = $٧\sqrt{٢}$، ب ج = ٢١، ق∠اب ج = ١٣٥°.

$$\text{اج}^{٢} = \left(٧\sqrt{٢}\right)^{٢} + ٢١^{٢} - \left(٢ \times ٧\sqrt{٢} \times ٢١ \times \text{جتا } ١٣٥^\circ\right)$$

نحسب قيمة ذلك ونبسِّطه.

$$= ٨٣٣$$

ومن ثَمَّ، نأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة.

$$\text{اج} = \sqrt{٨٣٣} \text{ كم}$$

$$= ٧\sqrt{١٧} \text{ كم}$$

مثال ٢ (متابعة)

نُضيف المعلومات التي حسبناها إلى الشكل:

ثم نطبِّق قانون الجيوب.

$$\frac{\text{جا ا}}{\text{ا}'} = \frac{\text{جا ب}}{\text{ب}'}$$

نعوِّض بالقيم ا′ = ٢١، ب′ = ٧√١٧، وقب = ١٣٥°.

$$\frac{\text{جا ا}}{٢١} = \frac{\text{جا } ١٣٥°}{٧\sqrt{١٧}}$$

$$\text{جا ا} = \frac{٢١ \text{ جا } ١٣٥°}{٧\sqrt{١٧}}$$

لإيجاد قيمة ا نطبق دالة الجيب العكسية.

$$\text{ا} = \text{جا}^{-١}\left(\frac{٢١ \text{ جا } ١٣٥°}{٧\sqrt{١٧}}\right)$$

$$= ٣٠{,}٩٦٣ \ldots°$$

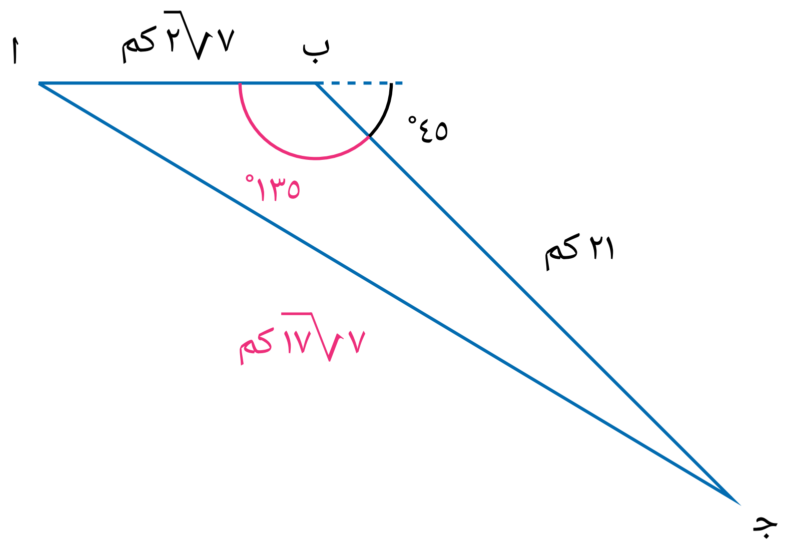
نحوِّل الناتج إلى قياس بالدرجات والدقائق.

$$= ٣٠° \; ٥٨'$$

وأخيرًا: نُوجِد مقدار الإزاحة واتجاهها لأقرب دقيقة.

اجـ = ٧√١٧ كم

ا = ٣٠° ٥٨′ جنوب شرق

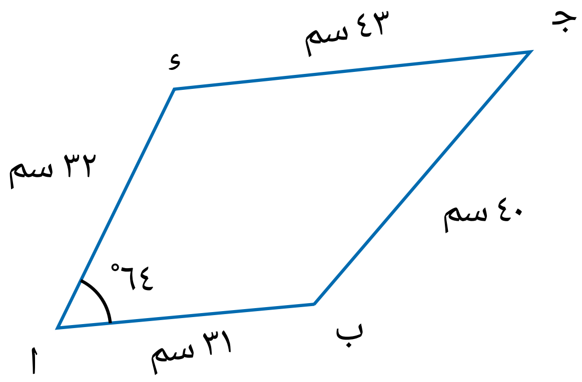


مثال ٣: استخدام قانون جيوب التمام لإيجاد قياس زاوية في شكل رباعي

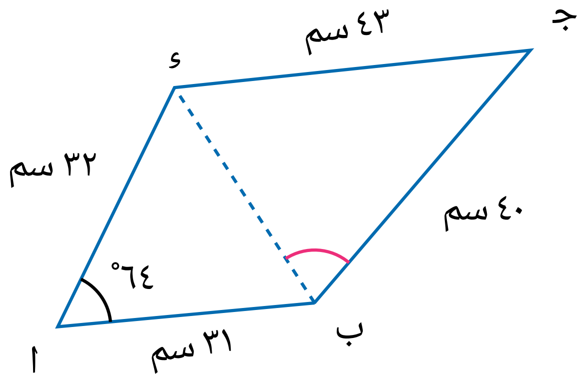
ابجء شكل رباعي، فيه اب = ٣١ سم، بج = ٤٠ سم، جء = ٤٣ سم، ءا = ٣٢ سم، ق∠ا = ٦٤°. أوجد ق∠جبء، لأقرب درجة.

الحل

نبدأ برسم الشكل الرباعي ابجء.



نرسم القطر بء، ونحدِّد الزاوية المطلوب منَّا حساب قياسها؛ وهي الزاوية جبء.



نطبِّق قانون جيوب التمام لنُوجِد طول الضلع الثالث في المثلث ابء.

بء^2 = اب^2 + اء^2

− (٢ × اب × اء × جتا ا)

مثال ٣ (متابعة)

$\text{ب ء}^{٢} = ٣١^{٢} + ٣٢^{٢} - (٢ \times ٣١ \times ٣٢ \times \text{جتا } ٦٤^\circ)$

نعوض بالقيم اب = ٣١، اء = ٣٢، ق∠ا = ٦٤°.

$= ١٩٨٥ - ١٩٨٤ \text{ جتا } ٦٤^\circ$

نحسب قيمة ذلك ونبسِّط.

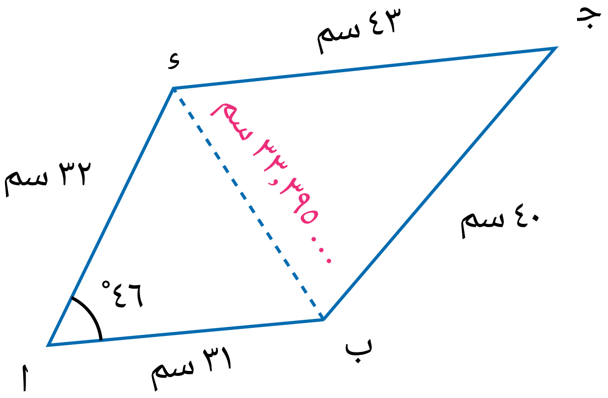
$= ١١١٥٫٢٧١ \ldots$

$\text{ب ء} = \sqrt{(١١١٥٫٢٧١ \ldots)} \text{ سم}$

نأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة.

$= ٣٣٫٣٩٥ \ldots \text{ سم}$

بعد ذلك، نُضيف الطول ب ء إلى الشكل الموضَّح.



$\text{جتا ا} = \dfrac{\text{ب}'^{٢} + \text{ج}'^{٢} - \text{ا}'^{٢}}{٢\text{ب}'\text{ج}'}$

نسترجع الصورة المُعاد ترتيبها لقانون جيوب التمام لحساب قياس أيِّ زاوية.

$\text{جتا (ج ب ء)} = \dfrac{٤٠^{٢} + (٣٣٫٣٩٥ \ldots)^{٢} - ٤٣^{٢}}{٢ \times ٤٠ \times (٣٣٫٣٩٥ \ldots)}$

نعوِّض بالقِيَم المعلومة.

$= ٠٫٣٢٤ \ldots$

مثال ٣ (متابعة)

نُوجِد قياس الزاوية جب‌ء بتطبيق دالة جيب التمام العكسية.

$$ق\angle جبء = جتا^{-١} (٠٫٣٢٤ \ldots)$$

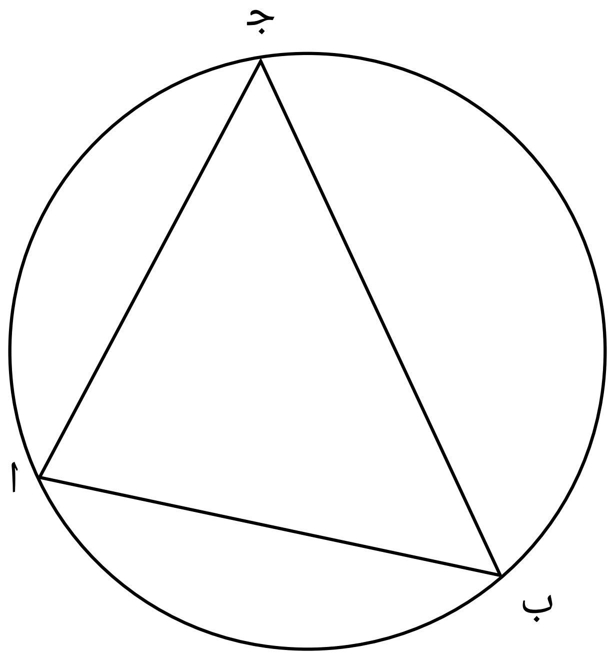
$$= ٧١٫٠٨٠ \ldots^\circ$$

$$\approx ٧١^\circ$$

وأخيرًا: نُوجِد قياس الزاوية ∠جب‌ء لأقرب درجة.

تعريف: قانون الجيب وعلاقته بالدائرة المارَّة برءوس المضلَّع

لأيِّ مثلث ا ب ج، قطر الدائرة المارَّة برءوسه يساوي نسبة قانون الجيوب:



$$\frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ج}'}{\text{جا ج}} = \text{٢نق}.$$

مثال ٤: إيجاد مساحة دائرة مارَّة برءوس مثلث بمعلومية قياس زاوية وطول الضلع المقابل لها

ا ب ج مثلث، فيه ق∠ا = ١٥٢° ب ج = ١١ سم. أوجد مساحة الدائرة المارَّة برءوس المثلث، لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل

تذكَّر أولًا أن الدائرة المارَّة برءوس المثلث هي الدائرة التي تمرُّ بجميع رءوس المثلث الثلاثة.

ومن ثَمَّ، نسترجع العلاقة بين نسبة قانون الجيوب ونصف قطر الدائرة المارَّة برءوس المثلث.

$$\frac{ا'}{جا ا} = \frac{ب'}{جا ب} = \frac{ج'}{جا ج} = ٢نق$$

نعوِّض ب ا' = ١١، ق∠ا = ١٥٢° في الجزء الأول من هذه النسبة.

$$\frac{١١}{جا ١٥٢°} = ٢نق$$

لإيجاد نصف قطر الدائرة المارَّة برءوس المثلث، نقسم طرفي المعادلة على ٢.

$$نق = \frac{١١}{٢ جا ١٥٢°}$$

$$= ١١,٧١٥ ... \text{ سم}$$

نسترجع الصيغة المُستخدَمة لإيجاد مساحة الدائرة.

$$\text{المساحة} = \pi نق^{٢}$$

ومن ثَمَّ نحسب مساحة الدائرة المارَّة برءوس المثلث.

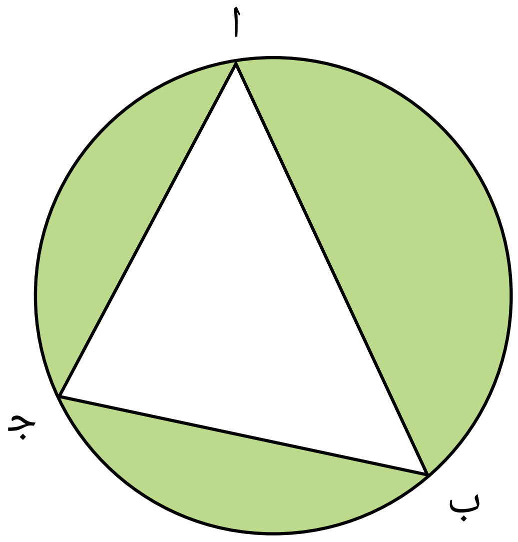
$$= \pi \times (١١,٧١٥)^{٢}$$

$$= ٤٣١,١٧٨ ...$$

$$\approx ٤٣١$$

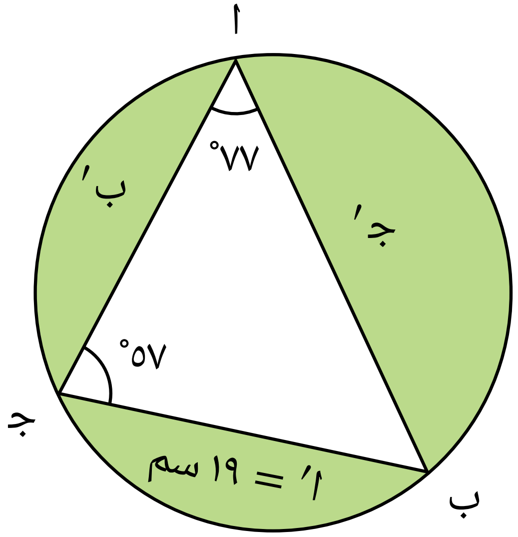
مساحة الدائرة المارَّة برءوس المثلث، لأقرب سنتيمتر مربع، تساوي ٤٣١ سم^{٢}.

مثال ٥: استخدام قانون الجيوب والصيغة المثلثية لمساحة المثلثات لحساب مساحات القِطَع الدائرية



أوجد مساحة الجزء الأخضر، إذا كان ق∠جاب = ٧٧°، ق∠بجا = ٥٧°، جب = ١٩ سم. قرِّب إجابتك لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل



نبدأ بإضافة المُعطيات الواردة في السؤال إلى الشكل، ونُسمِّي أطوال الأضلاع باستخدام الحروف ا′، ب′، ج′.

بعد ذلك نحسب مساحة المنطقة المظلَّلة.

المساحة المظلَّلة =
مساحة الدائرة − مساحة المثلث ابج

ثم نتذكَّر الصيغة المثلثية لمساحة المثلث.

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ا′ × ب′ × جا ج

مثال ٥ (متابعة)

ق∠ب = ١٨٠° − ٧٧° − ٥٧° = ٤٦°

نحدِّد قياس الزاوية المقابلة للضلع الذي طوله ب′.

$$\frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}}$$

بعد ذلك، نستخدم قانون الجيوب.

$$\frac{\text{ب}'}{\text{جا ٤٦°}} = \frac{\text{١٩}}{\text{جا ٧٧°}}$$

ومن ثَمَّ، نعوِّض بالقيم ا′ = ١٩، ق∠ا = ٧٧°، ق∠ب = ٤٦°.

$$\text{ب}' = \frac{\text{١٩ جا ٤٦°}}{\text{جا ٧٧°}}$$

$$= \text{... ١٤,٠٢٦ سم}$$

نضرب طرفي المعادلة في جا ٤٦°.

$$\text{مساحة المثلث ا ب جـ} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{١٩} \times (\text{... ١٤,٠٢٦}) \times \text{جا ٥٧°}$$

$$= \text{... ١١١,٧٥٨ سم}^{\text{٢}}$$

بعد ذلك، نعوِّض بالقيم ا′ = ١٩، ب′ = ... ١٤,٠٢٦،
ق∠جـ = ٥٧° في الصيغة المثلثية لمساحة المثلث.

$$\frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}} = \text{٢نق}$$

نتذكَّر العلاقة بين نسبة قانون الجيوب ونصف قطر الدائرة المارَّة برءوس المثلث.

مثال ٥ (متابعة)

$$٢نق = \frac{١٩}{\text{جا } ٧٧°}$$

نعوِّض بطول الضلع ا′ وقياس الزاوية ا.

$$نق = \frac{١٩}{٢ \text{ جا } ٧٧°} = ٩{,}٧٤٩ \ldots \text{ سم}$$

بعد ذلك، نُوجِد قيمة نق بقسمة طرفي المعادلة على ٢.

$$\text{مساحة الدائرة} = \pi \times (٩{,}٧٤٩ \ldots)^{٢}$$
$$= ٢٩٨{,}٦٤٠ \ldots \text{ سم}^{٢}$$

ومن ثَمَّ، نحسب مساحة الدائرة.

$$\text{المساحة المظلَّلة} = \text{مساحة الدائرة} - \text{مساحة المثلث ابج}$$
$$= (٢٩٨{,}٦٤٠ \ldots) - (١١١{,}٧٥٨ \ldots)$$
$$= ١٨٦{,}٨٨٢ \ldots$$
$$\approx ١٨٧$$

وأخيرًا: نطرح مساحة المثلث ابج من مساحة الدائرة المارَّة برءوس المثلث بالتعويض بقيمتي المساحتين.

المساحة المظلَّلة، لأقرب سنتيمتر مربع، تساوي ١٨٧ سم^{٢}.

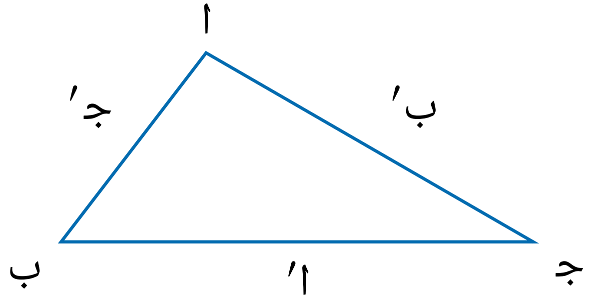
النقاط الرئيسية

- في المثلث ابج، كما هو موضَّح في الشكل الآتي، ينصُّ قانون الجيوب على أن:

$$\frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ج}'}{\text{جا ج}}.$$

وينصُّ قانون جيوب التمام على أن:

$$\text{ا}'^{\text{٢}} = \text{ب}'^{\text{٢}} + \text{ج}'^{\text{٢}} - \text{٢ب}'\text{ج}'\ \text{جتا ا}.$$



- يُمكن تطبيق قانون الجيوب وقانون جيوب التمام على المسائل في السياقات الحياتية لحساب الأطوال وقياسات الزوايا المجهولة في المثلثات غير القائمة. قد تتَّخِذ هذه الأسئلة صُوَرًا متنوِّعة؛ منها المسائل الكلامية، والمسائل التي تتضمَّن الاتجاهات، والمسائل التي تتضمَّن أشكالًا هندسية أخرى.

النقاط الرئيسية (متابعة)

- إذا لم يكن لدينا شكل مُعطًى، يجب أن تكون الخطوة الأولى هي رسم شكل باستخدام جميع المعلومات المُعطاة في السؤال.
- القانون الذي نَستخدِمه يعتمد على أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا المُعطاة. وقد يكون بإمكاننا الاختيار من الطريقتين أو قد نحتاج إلى تطبيق كلٍّ من قانون الجيوب وقانون جيب التمام أو القانون نفسه عدَّة مرَّات في المسألة نفسها.
- يُمكننا الجمع بين معرفتنا بقانون الجيوب وقانون جيوب التمام والنتائج الهندسية الأخرى؛ مثل الصيغة المثلثية لمساحة المثلث:

$$\text{المساحة} = \frac{١}{٢} \times \text{ا}' \times \text{ب}' \times \text{جا ج}.$$

- تُوجَد علاقة بين قانون الجيوب وقطر الدائرة المارَّة برءوس مثلث. لأيِّ مثلث ا ب ج، قطر الدائرة المارَّة برءوسه يساوي نسبة قانون الجيوب:

$$\frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ج}'}{\text{جا ج}} = ٢\text{نق}.$$