شارح: التحويل بين الصورة اللوغاريتمية والصورة الأُسِّية

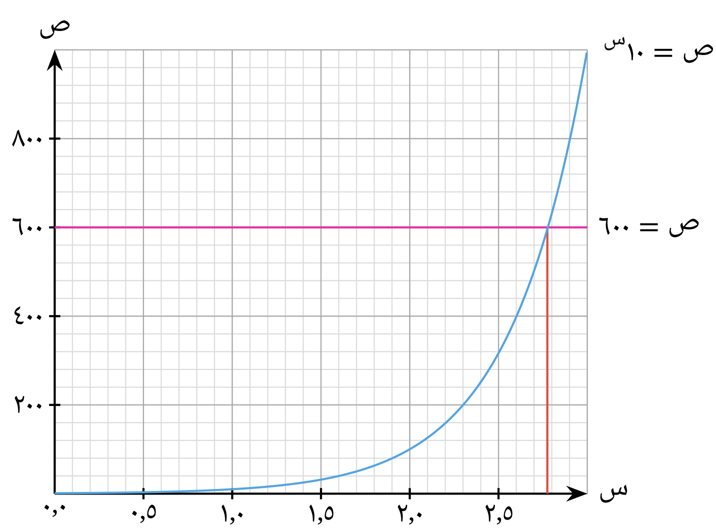
في هذا الشارح، سوف نتعلَّم كيف نُحوِّل بين الصورة اللوغاريتمية والصورة الأسية للمعادلات.

هذه عملية رياضية، إلا أن لها تطبيقات في الحياة الواقعية أيضًا؛ مثل قياس الصوت باستخدام مقياس الديسيبل، الذي يُستخدَم في المقارنة بين إشارات الصوتيات والإلكترونيات، وشدة الزلازل المختلفة باستخدام مقياس ريختر، أو سطوع النجوم، وذلك على سبيل المثال لا الحصر.

تعطينا هذه التحويلات صيغًا متكافئة تسمح لنا أيضًا بحل المعادلات الأسية أو اللوغاريتمية؛ حيث تظهر القيم المجهولة على صورة أسس أو لوغاريتمات. على سبيل المثال، افترض أننا نريد إيجاد قيمة س؛ حيث:

$$١٠^{\text{س}} = ٦٠٠.$$

كيف يمكننا الحل لإيجاد قيمة س؟ إحدى طرق الحل هي التجربة والخطأ، لكن بما أن ٦٠٠ لا تساوي ١٠ مرفوعة لأيِّ أس، إذن لا يمكن أن تكون عددًا صحيحًا. ونعلم أن $١٠^{٢} = ١٠٠$، $١٠^{٣} = ١٠٠٠$، وبما أن $\text{ص} = ١٠^{\text{س}}$ دالة تزايدية، إذن لا بد أن تتراوح قيمة س بين ٢ و٣. كما يمكننا تمثيل الدالتين $\text{ص} = ١٠^{\text{س}}$، $\text{ص} = ٦٠٠$ بيانيًّا وملاحظة موضع تقاطعهما؛ وهذا يعطينا فكرة عن قيمة س.



ثمة طريقة أفضل للتوصُّل إلى حل أكثر دقةً، وهي تحويل هذه المعادلة الأسية إلى معادلة على الصورة اللوغاريتمية لجعل س المتغيِّر التابع؛ فبفعل ذلك يمكننا في الحال كتابة:

$$\text{س} = \text{لو}_{١٠}\ ٦٠٠ = ٢{,}٧٧٨ \ (\text{٤ أرقام معنوية}) .$$

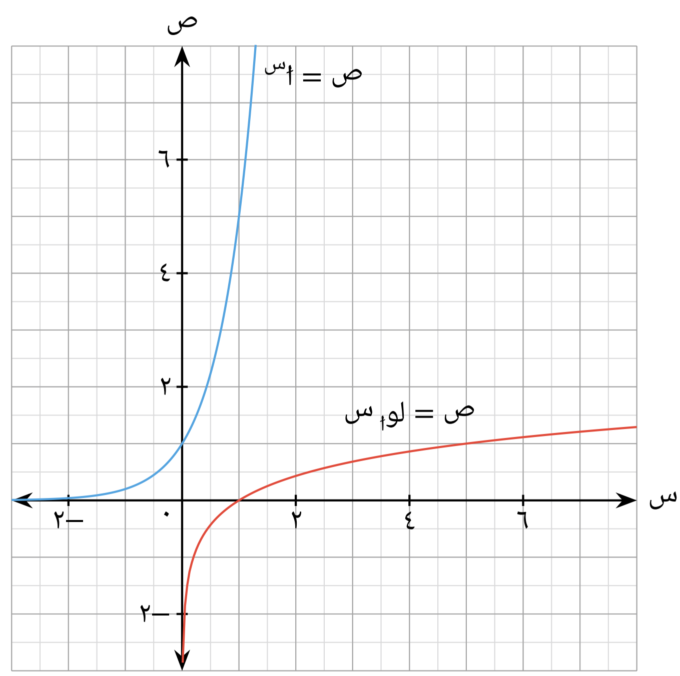
نتوقَّع هذه القيمة بناءً على نظرتنا العامة للدالة ص = $١٠^{س}$؛ حيث ٢ < س < ٣.

هيا نذكِّر أنفسنا الآن بكيفية التعبير عن جميع الدوال الأسية على الصورة اللوغاريتمية والعكس.

تعريف: العلاقة بين الصورة اللوغاريتمية والصورة الأسية

بالنسبة إلى س > ٠ والأساس أ > ٠، أ ≠ ١، تكون الصورة الأسية ص = $أ^{س}$ مكافئة للصورة اللوغاريتمية س = $لو_{أ}$ ص، وهو ما يتيح لنا التحويل من صورة إلى أخرى بمجرد تحديد أ، س، ص.

تُعَدُّ الدالة الأسية ص = $أ^{س}$ ذات المجال]−∞، ∞[والمدى]٠، ∞[الصورة العكسية للدالة اللوغاريتمية ص = $لو_{أ}$ س؛ وهكذا، نجد أن مجال الدالة اللوغاريتمية ومداها متبادلان مع الدالة الأسية، وهما]٠، ∞[،]−∞، ∞[على الترتيب.



نفترض أننا نريد كتابة $٥^{٢}$ = ٢٥ على الصورة اللوغاريتمية. أول ما علينا فعله هو مقارنة ذلك بـ $أ^{س}$ = ص، وتحديد الثوابت أ، س، ص، وهي في هذه الحالة أ = ٥، س = ٢، ص = ٢٥.

وتُعطَى الصورة اللوغاريتمية المكافئة بالصيغة $لو_{أ}$ ص = س، وبمجرد التعويض فيها بهذه القيم، يمكن كتابتها على الصورة $لو_{٥}$ ٢٥ = ٢.

إذن $٥^{٢}$ = ٢٥ على الصورة الأسية تكافئ الصورة اللوغاريتمية $لو_{٥}$ ٢٥ = ٢.

نتناول الآن العديد من الأمثلة لنعمِّق فهمنا للعلاقة بين هاتين الصورتين. بدايةً، هيا نتناول مثالًا بسيطًا على الأساس أ = ١٠ باستخدام تعبير مشابه.

مثال ١: تحويل معادلة من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

اكتب $١٠^{٣}$ = ١٠٠٠ في الصورة اللوغاريتمية المكافئة.

الحل

في هذا المثال، نستخدم التكافؤ بين الصورتين الأسية واللوغاريتمية للتحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية عن طريق تحديد المتغيِّرات التي تظهر في الصورة العامة.

تذكَّر أن الصورة الأسية $أ^{س} = ص$ تكافئ الصورة اللوغاريتمية $لو_{أ} ص = س$.

وبمقارنة $١٠^{٣} = ١٠٠٠$ بالصورة الأسية، يمكننا كتابة أ، ص، س على الصورة: $أ = ١٠$، $ص = ١٠٠٠$، $س = ٣$. وباستخدام ذلك مع الصورة اللوغاريتمية، نحصل على الصورة المكافئة:

$$لو_{١٠} ١٠٠٠ = لو ١٠٠٠ = ٣،$$

حيث نحذف أساس $لو_{١٠}$، وهو المتعارَف عليه عندما يكون الأساس، أ، ١٠. وهذا يُعرَف باللوغاريتم المعتاد.

والآن، نتناول مثالًا يجب علينا فيه حل معادلة لإيجاد قيمة مجهولة، س، باستخدام هذه الطريقة.

مثال ٢: إعادة كتابة المعادلة الأسية على الصورة اللوغاريتمية

اكتب المعادلة الأسية $هـ^{س} = ٥$ في الصورة اللوغاريتمية.

الحل

في هذا المثال، س قيمة مجهولة يمكننا إيجادها بإعادة كتابة التعبير على الصورة اللوغاريتمية؛ بحيث يكون س المتغيِّر التابع للمعادلة.

وبمقارنة هذه الصورة بالدالة الأسية $أ^{س} = ص$، يمكننا كتابة أ، ص على الصورة: $أ = هـ$، $ص = ٥$.

وباستخدام ذلك مع الصورة اللوغاريتمية $س = لو_{أ} ص$، نحصل على الصورة المكافئة:

$$س = لو_{هـ} ٥،$$

حيث نكتب أساس $لو_{هـ}$ على الصورة $لو_{هـ}$، وهو المتعارَف عليه عندما يكون الأساس، أ، يساوي هـ. وهذا يُعرَف باللوغاريتم الطبيعي.

في المثال التالي، لدينا أساس مختلف عن أساس اللوغاريتم المعتاد، $أ = ١٠$، أو الطبيعي، $أ = هـ$، ولدينا أيضًا أسس سالبة وكسر، ولكننا سنستخدم الطريقة نفسها.

مثال ٣: تحويل معادلة من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

اكتب $٤^{-٢} = \frac{١}{١٦}$ في الصورة اللوغاريتمية المكافئة.

الحل

في هذا المثال، لدينا تعبير لا يحتوي على أيِّ متغيِّرات علينا إيجاد قيمتها.

بل نريد تحويل هذا التعبير من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية.

بمقارنة هذه الصورة مع الدالة الأسية $أ^{س} = ص$، يمكننا كتابة أ، ص، س على الصورة: أ = ٤، ص = $\frac{١}{١٦}$، س = −٢.
وبمقارنة الصورة الأسية بالصورة اللوغاريتمية، نجد أن $٤^{-٢} = \frac{١}{١٦}$ يكافئ:

$$لو_{٤} \frac{١}{١٦} = -٢.$$

نتناول الآن مثالًا نقوم فيه بالأمر نفسه لكن بالعكس، وهو التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية.

مثال ٤: تحويل معادلة من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

اكتب لو ١٠٠٠٠٠٠ = ٦ في الصورة الأسية المكافئة.

الحل

في هذا المثال، لدينا تعبير علينا تحويله من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية.

تذكَّر أن الصورة اللوغاريتمية، $لو_{أ} ص = س$، تكافئ $أ^{س} = ص$. تذكَّر أنه إذا لم يخبرنا السؤال بأساس اللوغاريتم، فلنفترض أنه يساوي ١٠.

لدينا هنا أ = ١٠، ص = ١٠٠٠٠٠٠، س = ٦؛ ومن ثَمَّ، لو ١٠٠٠٠٠٠ = ٦ يكافئ:

$$١٠^{٦} = ١٠٠٠٠٠٠.$$

في المثال الأخير، هيا نلقِ نظرة على كيفية تحويل معادلة لوغاريتمية إلى الصورة الأسية.

مثال ٥: إعادة كتابة معادلة لوغاريتمية على الصورة الأسية

اكتب المعادلة اللوغاريتمية ٨ = $لو_{هـ}$ س في صورة أسية.

الحل

في هذا المثال، س قيمة مجهولة يمكننا إيجادها عن طريق إعادة كتابة التعبير في الصورة الأسية وجعل س المتغيِّر التابع للمعادلة.

تذكَّر أنه في حال وجود لوغاريتم طبيعي $لو_{هـ}$ س، نَعرِف أن أساسه يساوي هـ.

لدينا هنا $\text{أ} = \text{هـ}$، $\text{ص} = ٨$؛ ومن ثَمَّ، $٨ = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ يكافئ:

$$\text{هـ}^{٨} = \text{س}.$$

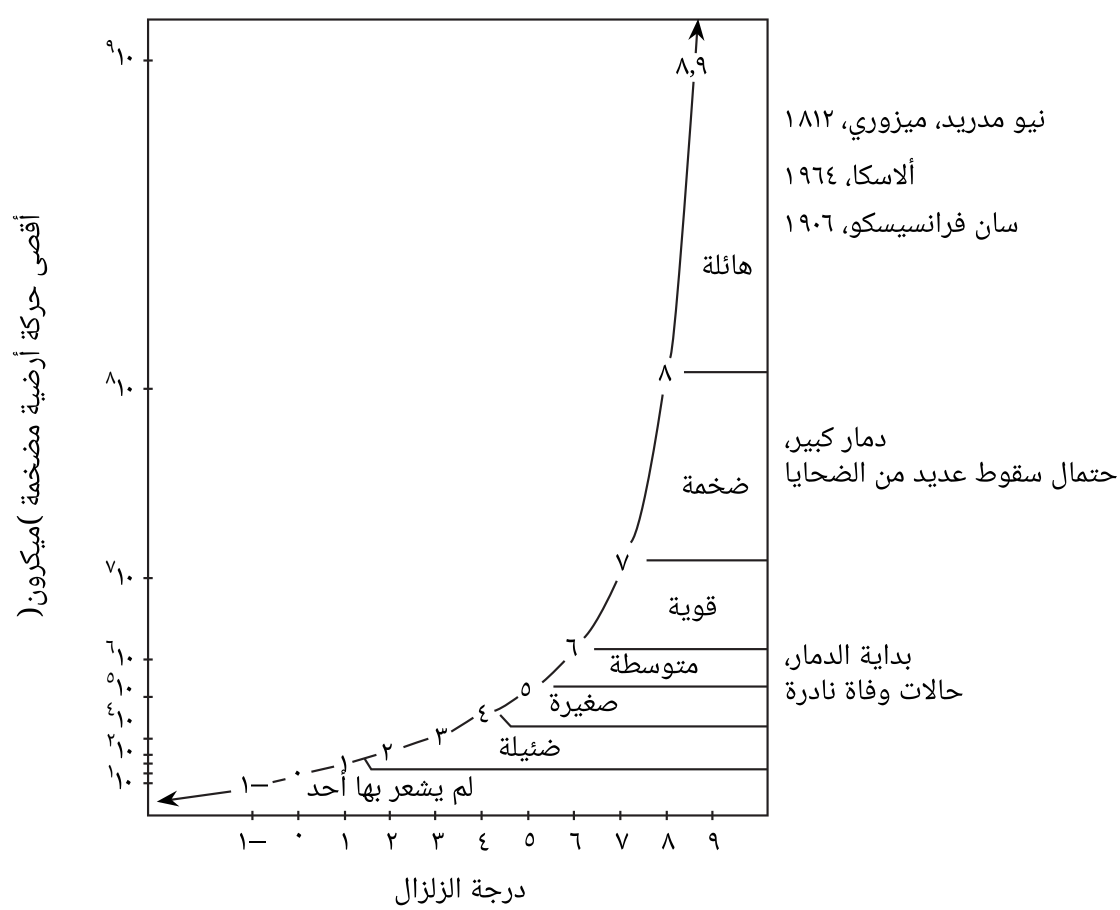
والآن، نلقي نظرة على كيفية استخدام هذه التحويلات لحل مسألة من الحياة اليومية. افترض أنك تريد المقارنة بين الشدة، $\text{ش}_{\text{ر}}$، لزلزالين مختلفين أو درجتهما، $\text{د}_{\text{ر}}$؛ حيث $\text{ر} = ١، ٢$. يمكن التعبير عن العلاقة بينهما بالمعادلة:

$$\text{ش}_{١} = \text{ش}_{٢}\,١٠^{\text{د}_{١} - \text{د}_{٢}}،$$

والتي يمكن إعادة كتابتها على الصورة:

$$\frac{\text{ش}_{١}}{\text{ش}_{٢}} = ١٠^{\text{د}_{١} - \text{د}_{٢}}.$$

وتُقاس الدرجة، $\text{د}_{\text{ر}}$، بمقياس لوغاريتمي أساسه ١٠، يُعرَف بمقياس ريختر.



نفترض حدوث زلزال شدته $\text{ش}_{١}$، وتزيد شدته ٦٠٠ مرة عن زلزال آخر شدته $\text{ش}_{٢}$. جبريًّا، يمكن التعبير عن ذلك على الصورة:

$$\text{ش}_{١} = ٦٠٠\,\text{ش}_{٢}؛$$

ومن ثَمَّ:

$$\frac{ش_١}{ش_٢} = ٦٠٠.$$

علينا حساب الفرق بين درجة الزلزالين، وهو ما نُعبِّر عنه بالمعادلة $س = د_١ - د_٢$، وبدمج المعادلتين اللتين علينا حلهما يصبح لدينا:

$$١٠^{س} = ٦٠٠.$$

وبتحويل هذه المعادلة إلى الصورة اللوغاريتمية، يمكننا إيجاد قيمة س على الصورة:

$$س = لو_{١٠} ٦٠٠ = ٢٫٧٧٨ \text{ (٤ أرقام معنوية) .}$$

ثمة طريقة أخرى لحل هذه المسائل التي تحتوي على أسس، فبدلًا من مقارنة الصورة اللوغاريتمية بالصورة الأسية، نأخذ اللوغاريتمات المعتادة أو الطبيعية لطرفَي المعادلة. يمكن التعبير عن أيِّ لوغاريتم لو بأساس معيَّن أ بدلالة اللوغاريتم المعتاد أو الطبيعي على الصورة:

$$لو_{أ} ص = \frac{لو_{هـ} ص}{لو_{هـ} أ} = \frac{لو ص}{لو أ}.$$

وبتطبيق اللوغاريتمات المعتادة على طرفَي المعادلة $ص = أ^{س}$، نحصل على:

$$لو ص = لو أ^{س} = س لو أ،$$

وهو ما يمكن إعادة ترتيبه لنحصل على:

$$س = \frac{لو ص}{لو أ} = لو_{أ} ص.$$

ولكن في هذه الحالة، يتعيَّن علينا استخدام قوانين اللوغاريتمات أو الأسس، وهذا ليس ضمن نطاق الشارح، وستتناوله بالتفصيل في درس آخر.

النقاط الرئيسية

- الدالة الأسية $ص = أ^{س}$ هي معكوس الدالة اللوغاريتمية $ص = لو_{أ} س$.
- يكون للوغاريتم المعتاد الأساس ١٠، ويُكتَب عادةً على الصورة $ص = لو س$، ويكافئ $س = ١٠^{ص}$.
- يكون للوغاريتم الطبيعي الأساس هـ، ويُكتَب بوجه عام في الصورة $ص = لو_{هـ} س$، ويكافئ $س = هـ^{ص}$.