التحويل بين الصورة اللوغاريتمية والصورة الأسية

$$أ^{س} = ص$$

$$\leftrightarrow$$

$$س = \text{لو}_{أ}\, ص$$

أهداف الدرس

ستتمكَّن من:

- تحويل معادلة من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية
- تحويل معادلة من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

مقدمة

يُستخدَم التحويل بين الصورة اللوغاريتمية والصورة الأسية في العديد من المسائل الرياضية وكذلك في تطبيقات الحياة الواقعية، مثل: قياس الصوت باستخدام مقياس الديسيبل وقياس شدة الزلازل المختلفة.

تعطينا هذه التحويلات صيغًا متكافئة تسمح لنا أيضًا بحل المعادلات الأسية أو اللوغاريتمية؛ حيث تظهر القيم المجهولة على صورة أسس أو لوغاريتمات.

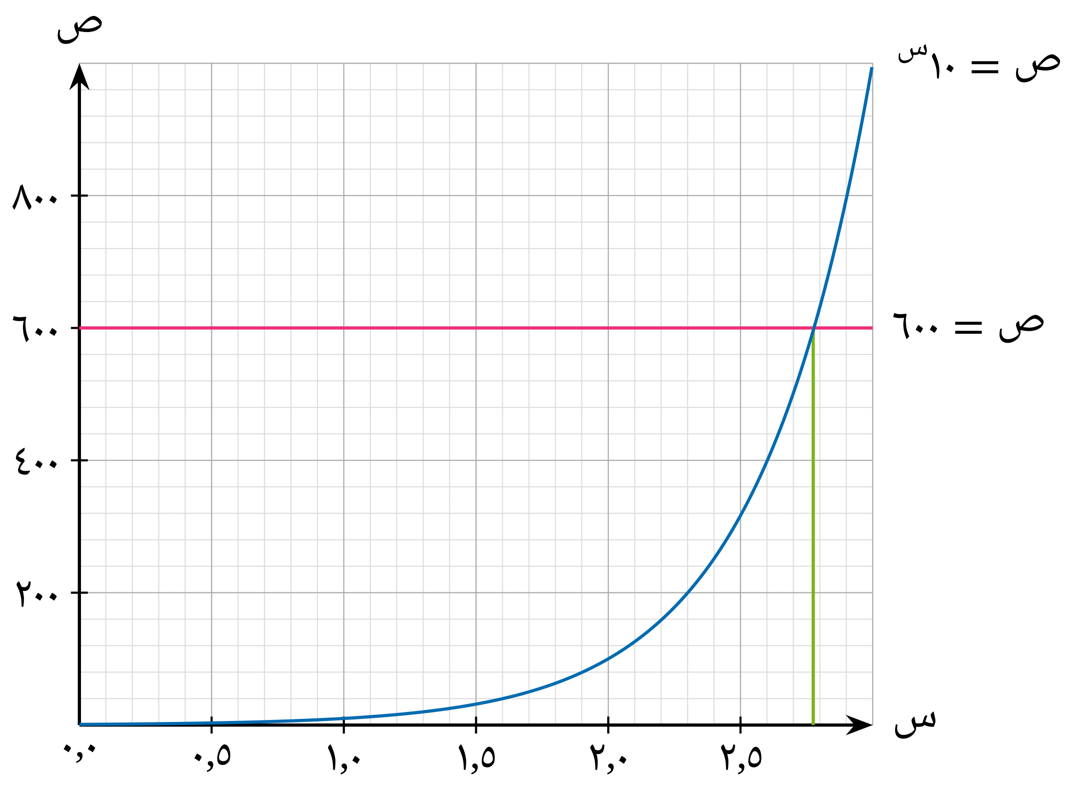
على سبيل المثال: افترض أننا نريد إيجاد قيمة س؛ حيث:

$$١٠^{س} = ٦٠٠.$$

مقدمة (متابعة)

إحدى طرق الحل هي التجربة والخطأ، لكن هذا لن يعطينا حلًّا دقيقًا بما أن ٦٠٠ لا تساوي ١٠ مرفوعة لأيٍّ أس.

نعلم أن ص = ١٠^{س} دالة تزايدية. يمكننا تمثيل الدالة ص = ١٠^{س} بيانيًّا، وعند ص = ٦٠٠ يمكننا البحث عن قيمة س بيانيًّا.



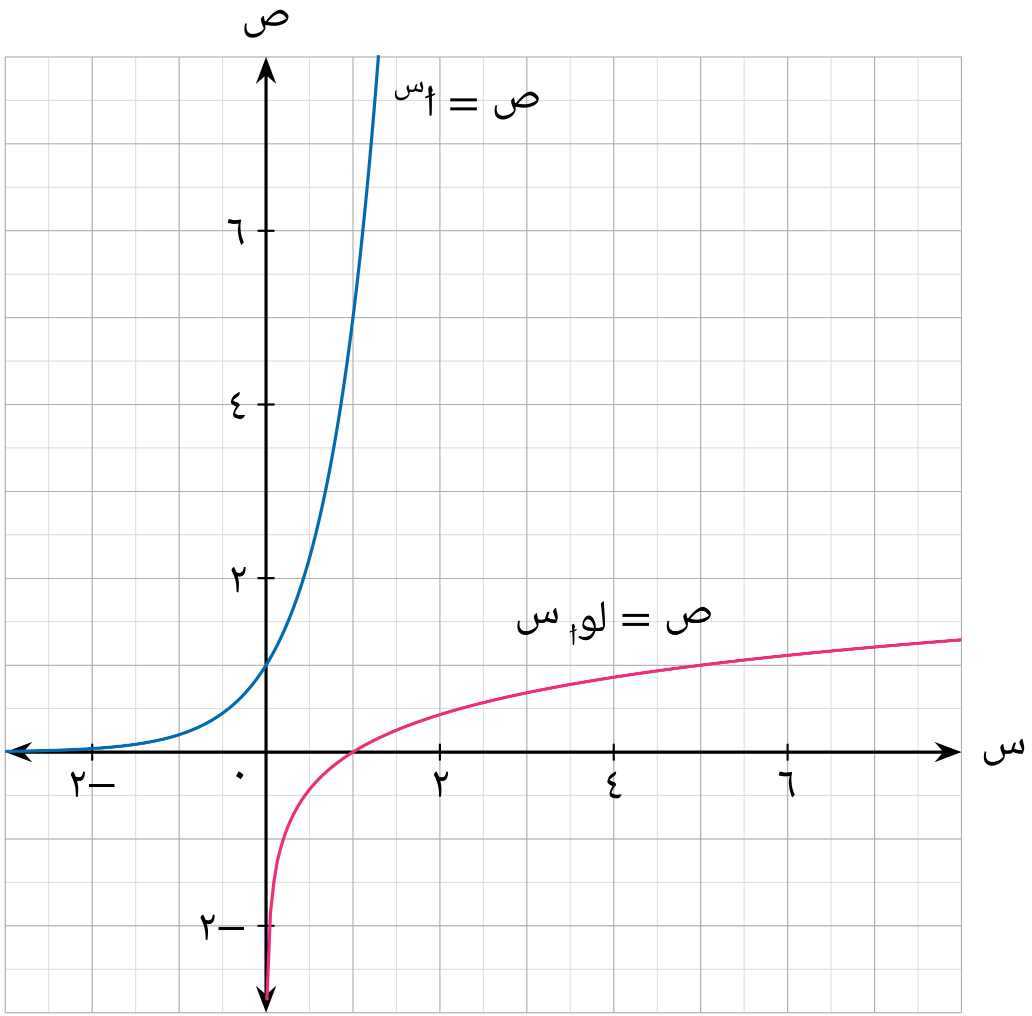
ثمة طريقة أفضل للتوصُّل إلى حل أكثر دقةً، وهي تحويل هذه المعادلة الأسية إلى معادلة على الصورة اللوغاريتمية لجعل س المتغيِّر التابع:

س = لو$_{١٠}$ ٦٠٠ = ٢,٧٧٨ (٤ أرقام معنوية).

تعريف: العلاقة بين الصورة اللوغاريتمية والصورة الأسية

بالنسبة إلى $س > ٠$ والأساس $أ > ٠$، $أ \neq ١$، تكون الصورة الأسية $ص = أ^{س}$ مكافئة للصورة اللوغاريتمية $س = لو_{أ} ص$، وهو ما يتيح لنا التحويل من صورة إلى أخرى بمجرد تحديد أ، س، ص.

مجال الدوال اللوغاريتمية والأسية ومداها



تُعَدُّ الدالة الأسية ص = أ^س ذات المجال]−∞، ∞[والمدى]٠، ∞[الصورة العكسية للدالة اللوغاريتمية ص = لوأ س.

وهكذا نجد أن مجال الدالة اللوغاريتمية ومداها متبادلان مع الدالة الأسية، وهما]٠، ∞[،]−∞، ∞[على الترتيب.

مثال ١: تحويل معادلة من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

اكتب $١٠^{٣} = ١٠٠٠$ في الصورة اللوغاريتمية المكافئة.

الحل

علينا استخدام التكافؤ بين الصورتين الأسية واللوغاريتمية للتحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية عن طريق تحديد المتغيِّرات التي تظهر في الصورة العامة.

$١٠٠٠ = ١٠^{٣}$ يماثل $أ^{س} = ص$

بتذكر الصورة الأسية $أ^{س} = ص$ ومقارنتها بالصورة المعطاة، يمكننا كتابة متغيرات الصورة اللوغاريتمية $لو_{أ} ص = س$.

$أ = ١٠$، $ص = ١٠٠٠$، $س = ٣$

بكتابة قيم أ، ص، س يمكننا إيجاد الصورة اللوغاريتمية.

$لو_{١٠} ١٠٠٠ = لو ١٠٠٠ = ٣$

ملاحظة: نحذف أساس $لو_{١٠}$، وهو المتعارَف عليه عندما يكون الأساس، أ، ١٠. وهذا يُعرَف باللوغاريتم المعتاد.

مثال ٢: إعادة كتابة المعادلة الأسية على الصورة اللوغاريتمية

اكتب المعادلة الأسية $هـ^{س} = ٥$ في الصورة اللوغاريتمية.

الحل

هنا س قيمة مجهولة يمكننا إيجادها بإعادة كتابة التعبير على الصورة اللوغاريتمية؛ بحيث يكون س المتغيِّر التابع للمعادلة.

$هـ^{س} = ٥$ يماثل $أ^{س} = ص$

بتذكر الصورة الأسية $أ^{س} = ص$ ومقارنتها بالصورة المعطاة، يمكننا كتابة متغيرات الصورة اللوغاريتمية $لو_{أ} ص = س$.

$أ = هـ$، $ص = ٥$

بكتابة قيم أ، ص يمكننا إيجاد الصورة اللوغاريتمية.

$س = لو_{هـ} ٥$

ثم نستخدم القيم السابقة مع الصورة اللوغاريتمية $س = لو_{أ} ص$.

ملاحظة : عندما يكون الأساس أ يساوي هـ فإنه يُكتَب على الصورة $لو_{هـ}$ وهذا يُعرف باللوغاريتم الطبيعي.

مثال ٣: تحويل معادلة من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

اكتب $٤^{-٢} = \frac{١}{١٦}$ في الصورة اللوغاريتمية المكافئة.

الحل

لدينا هنا تعبير لا يحتوي على أيِّ متغيِّرات علينا إيجاد قيمتها.

$٤^{-٢} = \frac{١}{١٦}$ يماثل $\text{أ}^{\text{س}} = \text{ص}$

بتذكر الصورة الأسية $\text{أ}^{\text{س}} = \text{ص}$ ومقارنتها بالصورة المعطاة، يمكننا كتابة متغيرات الصورة اللوغاريتمية $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص} = \text{س}$.

$\text{أ} = ٤$، $\text{ص} = \frac{١}{١٦}$، $\text{س} = -٢$

بكتابة قيم أ، ص، س يمكننا إيجاد الصورة اللوغاريتمية.

$\text{لو}_{٤}\,\frac{١}{١٦} = -٢$

ثم نستخدم القيم السابقة مع الصورة اللوغاريتمية $\text{س} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$.

مثال ٤: تحويل معادلة من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

اكتب لو ١٠٠٠٠٠٠ = ٦ في الصورة الأسية المكافئة.

الحل

لدينا هنا تعبير علينا تحويله من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية.

لو ١٠٠٠٠٠٠ = ٦ يماثل

$لو_{أ}$ ص = س

بتذكر الصورة اللوغاريتمية $لو_{أ}$ ص = س ومقارنتها بالصورة المعطاة، يمكننا كتابة متغيرات الصورة الأسية $أ^{س}$ = ص. تذكَّر أنه إذا لم يخبرنا السؤال بأساس اللوغاريتم، فلنفترض أنه يساوي ١٠.

أ = ١٠ ص = ١٠٠٠٠٠٠ س = ٦

بكتابة قيم أ، ص، س يمكننا إيجاد الصورة اللوغاريتمية.

$١٠^{٦}$ = ١٠٠٠٠٠٠

ثم نستخدم القيم السابقة مع الصورة الأسية $أ^{س}$ = ص.

مثال ٥: إعادة كتابة معادلة لوغاريتمية على الصورة الأسية

اكتب المعادلة اللوغاريتمية $٨ = لو_{هـ} س$ في صورة أسية.

الحل

هنا س قيمة مجهولة يمكننا إيجادها عن طريق إعادة كتابة التعبير في الصورة الأسية وجعل س المتغيِّر التابع للمعادلة.

$٨ = لو_{هـ} س$ يماثل $لو_{أ} س = ص$

بتذكر الصورة اللوغاريتمية $لو_{أ} س = ص$ ومقارنتها بالصورة المعطاة، يمكننا كتابة متغيرات الصورة الأسية $أ^{ص} = س$. تذكَّر أنه إذا لم يخبرنا السؤال بأساس اللوغاريتم، فلنفترض أنه يساوي ١٠.

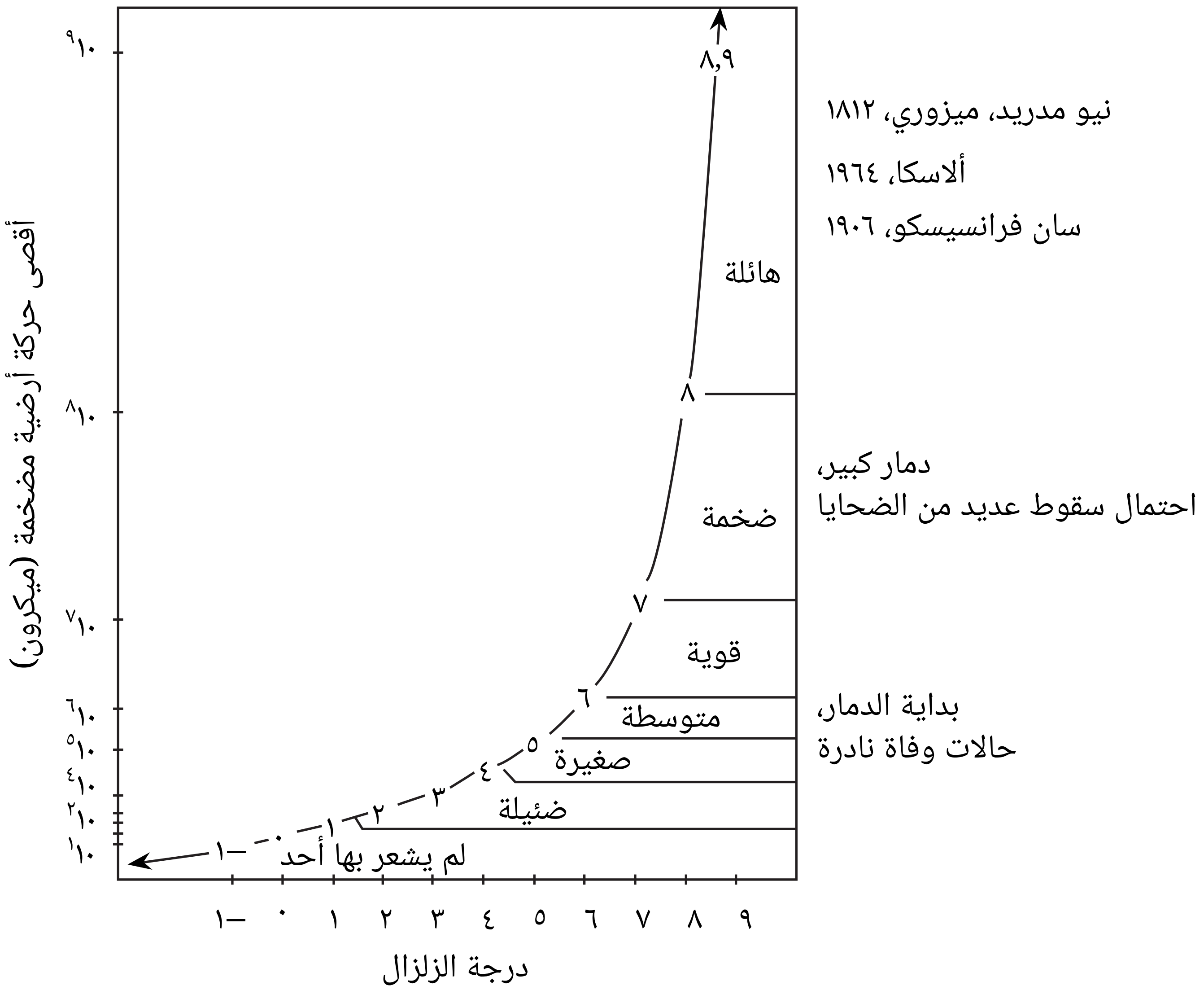
$أ = هـ،\quad ص = ٨$

بكتابة قيم أ، ص، س يمكننا إيجاد الصورة اللوغاريتمية.

$هـ^{٨} = س$

ثم نستخدم القيم السابقة مع الصورة الأسية.

تطبيق: مسألة تتناول زلزالًا



افترض أنك تريد المقارنة بين الشدة $\text{ش}_{ر}$ لزلزالين مختلفين أو درجتهما $\text{د}_{ر}$؛ حيث ر = ١، ٢. يمكن التعبير عن العلاقة بينهما بالمعادلة:

$$\text{ش}_{١} = \text{ش}_{٢}\,١٠^{\text{د}_{١}-\text{د}_{٢}}،$$

ويمكن إعادة كتابتها على الصورة:

$$\frac{\text{ش}_{١}}{\text{ش}_{٢}} = ١٠^{\text{د}_{١}-\text{د}_{٢}}.$$

وتُقاس الدرجة $\text{د}_{ر}$ بمقياس لوغاريتمي أساسه ١٠، يُعرَف بمقياس ريختر.

تطبيق: مسألة تتناول زلزالًا (متابعة)

نفترض حدوث زلزال شدته $ش_{١}$، وتزيد شدته ٦٠٠ مرة عن زلزال آخر شدته $ش_{٢}$.
جبريًّا $ش_{١}$ يمكن كتابتها بوصفها معادلة في $ش_{٢}$.

$ش_{١} = ٦٠٠ ش_{٢}$؛

$$\frac{ش_{١}}{ش_{٢}} = ٦٠٠$$

لحساب الفرق بين درجة الزلزالين، وهو ما نُعبِّر عنه بالمعادلة $س = د_{١} - د_{٢}$،
علينا حل المعادلة $ص = أ^{س}$، حيث $أ = ١٠$، $ص = ٦٠٠$.

$$١٠^{س} = ٦٠٠$$

بتحويل المعادلة الأسية السابقة إلى معادلة لوغاريتمية، يمكننا إيجاد قيمة س.

$س = لو_{١٠} ٦٠٠ = ٢{,}٧٧٨$ (٤ أرقام معنوية)

تطبيق: مسألة تتناول زلزالًا (حل آخر)

$$\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{أ}} = \frac{\text{لو ص}}{\text{لو أ}}$$

ثمة طريقة أخرى لحل هذه المسائل التي تحتوي على أسس، فبدلًا من مقارنة الصورة اللوغاريتمية بالصورة الأسية، نأخذ اللوغاريتمات المعتادة أو الطبيعية لطرفَي المعادلة. يمكن التعبير عن أيٍّ لوغاريتم لو بأساس معيَّن أ بدلالة اللوغاريتم المعتاد أو الطبيعي.

$$\text{لو ص} = \text{لو}\,\text{أ}^{\text{س}} = \text{س}\ \text{لو أ}$$

ثم نطبق اللوغاريتمات المعتادة على طرفَي المعادلة $\text{ص} = \text{أ}^{\text{س}}$.

$$\text{س} = \frac{\text{لو ص}}{\text{لو أ}} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$$

وعندما نعيد الترتيب، نحصل على المعادلة النهائية.

ملاحظة: في هذه الحالة يتعيَّن علينا استخدام قوانين اللوغاريتمات أو الأسس، وهذا ليس ضمن نطاق العرض التقديمي، وسنتناوله بالتفصيل في درس آخر.

النقاط الرئيسية

- الدالة الأسية ص = $أ^{س}$ هي معكوس الدالة اللوغاريتمية ص = $لو_{أ}$ س
- يكون للوغاريتم المعتاد الأساس ١٠، ويُكتَب عادةً على الصورة ص = لو س، ويكافئ س = $١٠^{ص}$.
- يكون للوغاريتم الطبيعي الأساس هـ، ويُكتَب بوجه عام في الصورة ص = $لو_{هـ}$ س، ويكافئ س = $هـ^{ص}$.