شارح: معادلة الدائرة

في هذا الشارح، سنتعلَّم كيف نُوجد معادلة دائرةٍ باستخدام مركزها ونقطة مُعطاة أو نصف القطر، والعكس.

كيف نَصِف الدائرة رياضيًّا

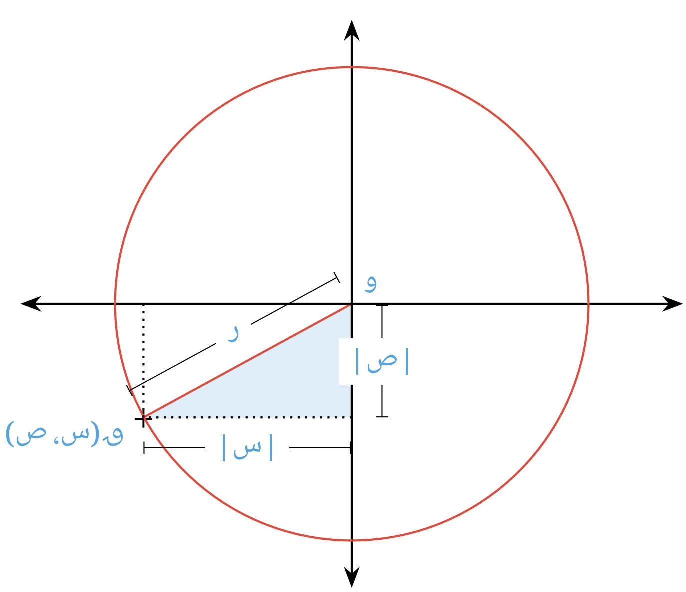
من الناحية الرياضية، يمكن وصف الدائرة بأنها المحلُّ الهندسي لنقاطٍ تقع على مسافات متساوية من نقطة معينة، تُسمَّى مركز الدائرة. يعني ذلك أن الدائرة هي المجموعة المكوَّنة من جميع النقاط، وفقط هذه النقاط، التي تقع على مسافة معينة من مركز الدائرة. هذه المسافة الثابتة بين أيِّ نقطة في الدائرة ومركزها هي نصف قطر الدائرة.

لاحظ أن الدائرة ليست تمثيلًا بيانيًّا للدالة ص = د(س) لأن أحد عناصر المجال يمكن أن يرتبط بعنصرين في مداها. بعبارةٍ أخرى، يمكننا إيجاد نقطتين على الدائرة لهما الإحداثي س نفسه.

لكنَّ هناك علاقة بين الإحداثي س والإحداثي ص لجميع النقاط على الدائرة: هذه هي **معادلة الدائرة**.

معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند نقطة الأصل في صورة المركز ونصف القطر.

لنبدأ بدائرةٍ يقع مركزها عند نقطة الأصل للمستوى الإحداثي. هذه الدائرة هي المحلُّ الهندسي لنقاط تقع على مسافات متساوية من نقطة الأصل. إن المسافة من أيِّ نقطة و(س، ص) على الدائرة إلى نقطة الأصل هي نصف قطر الدائرة ر. كما أن العلاقة بين الإحداثي س والإحداثي ص لجميع النقاط على الدائرة تُعطَى إذن من خلال تطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث القائم الزاوية الموضَّح في الشكل أدناه؛ حيث يكون الوتر هو نصف قطر الدائرة.



نجد أن

$$|\text{س}|^{٢} + |\text{ص}|^{٢} = \text{ر}^{٢}.$$

يمكن حذف القيم المُطلَقة لأنها مربَّعة ($|\text{س}|^{٢} = \text{س}^{٢}$ أيًّا كانت إشارة س). إذن،

$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{ر}^{٢}.$$

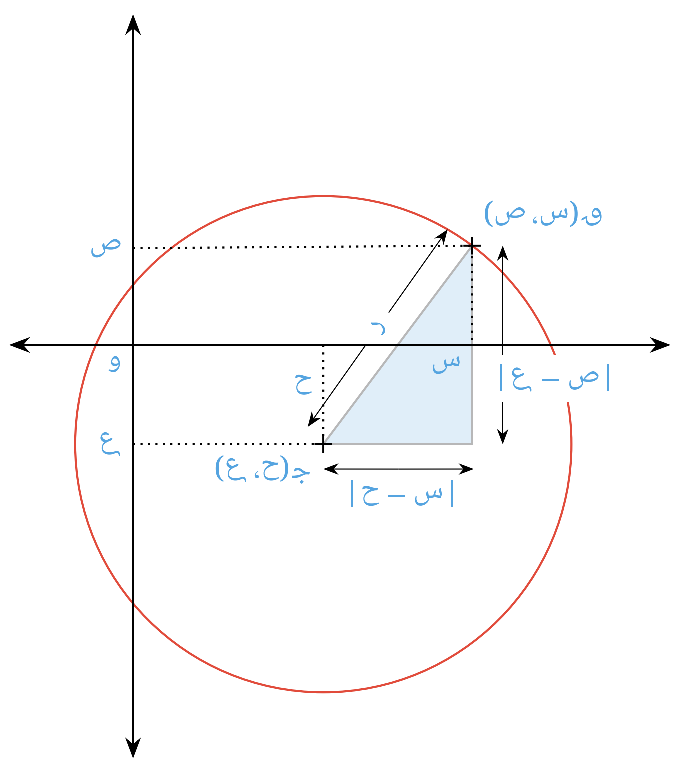
هذه هي معادلة الدائرة التي نصف قطرها ر، ويقع مركزها عند نقطة الأصل.

سنوجد الآن معادلة أيِّ دائرة.

معادلة الدائرة التي نصف قطرها ر ويقع مركزها عند ج(ح، ع) في صورة المركز ونصف القطر.

الدائرة التي نصف قطرها ر ويقع مركزها عند ج(ح، ع) تمثِّل المحلَّ الهندسي لنقاط تقع على مسافات متساوية من النقطة ج(ح، ع). أيُّ نقطة تقع على الدائرة تكون على مسافة ر من المركز ج(ح، ع).

نطبِّق نظرية فيثاغورس على المثلث القائم الزاوية الموضَّح في الشكل التالي؛ حيث يكون الوتر هو نصف قطر الدائرة.



نجد أن

$$|\text{س}_{\text{و}} - \text{ح}|^{٢} + |\text{ص}_{\text{و}} - \text{ع}|^{٢} = \text{ر}^{٢}$$

وهو ما يمكن إعادة كتابته على الصورة:

$$(س_و - ح)^٢ + (ص_و - ع)^٢ = ر^٢.$$

وهذا ينطبق على أيِّ نقطة على الدائرة، إذن معادلة الدائرة التي نصف قطرها ر ويقع مركزها عند جـ(ح، ع)، والتي تَصِف العلاقة بين الإحداثي س والإحداثي ص لجميع النقاط على الدائرة، يمكن كتابتها على الصورة:

$$(س - ح)^٢ + (ص - ع)^٢ = ر^٢.$$

لاحظ أن المعادلة العامة للدائرة يمكن استنتاجها أيضًا من معادلة الدائرة التي نصف قطرها ر، ويقع مركزها عند نقطة الأصل عن طريق نقل الدائرة ح وحدة أفقيًا، وع وحدة رأسيًا؛ أي من خلال المتجه (ح، ع).

تُكتب معادلة الدائرة المعطاة في الأعلى على الصورة التي تُسمَّى المركز ونصف القطر. يمكن كتابة معادلة الدائرة بصورة أخرى، تُسمَّى الصورة العامة. يمكننا الحصول على هذه الصورة ببساطة عن طريق فكِّ الأقواس في المعادلة التي تكون في صورة المركز ونصف القطر.

معادلة الدائرة بالصورة العامة

معادلة الدائرة التي نصف قطرها ر، ويقع مركزها عند جـ(ح، ع) هي: $(س - ح)^٢ + (ص - ع)^٢ = ر^٢$. بفكِّ الأقواس، نحصل على

$$س^٢ + ص^٢ - ٢حس - ٢عص + ح^٢ + ع^٢ = ر^٢.$$

يمكن إعادة كتابة هذا في صورة:

$$س^٢ + ص^٢ - ٢حس - ٢عص + ح^٢ + ع^٢ - ر^٢ = ٠.$$

إذا جعلنا $-٢ح$ يكون أ، و$-٢ع$ يكون ب و$ح^٢ + ع^٢ - ر^٢$ يكون ث، سنحصل على

$$س^٢ + ص^٢ + أس + بص + ث = ٠.$$

هذه هي معادلة الدائرة في الصورة العامة.

مثال ١: كتابة معادلة الدائرة بمعلومية مركزها

ما معادلة الدائرة التي نصف قطرها ١٠ ومركزها (٤، −٧)؟

اكتب الإجابة في الصورة: $س^٢ + ص^٢ + أس + بص + ث = ٠$.

الحل

نبدأ بكتابة معادلة الدائرة:

$$(س - ح)^{٢} + (ص - ع)^{٢} = ر^{٢}.$$

نصف القطر ر يساوي ١٠ وإحداثيًا المركز هما: ح = ٤ وع = –٧؛ إذن هذا يعطينا

$$(س - ٤)^{٢} + (ص + ٧)^{٢} = ١٠^{٢}$$
$$(س - ٤)^{٢} + (ص + ٧)^{٢} = ١٠٠.$$

هذه هي معادلة الدائرة التي نصف قطرها ١٠ ومركزها (٤، –٧) في صورة المركز ونصف القطر.

لكن، المطلوب منَّا هو كتابتها على الصورة: $س^{٢} + ص^{٢} + أس + بص + ث = ٠$.

علينا فكُّ الأقواس،

$$س^{٢} - ٨س + ١٦ + ص^{٢} + ١٤ص + ٤٩ = ١٠٠،$$

ثم طرح ١٠٠ من كلا الطرفين،

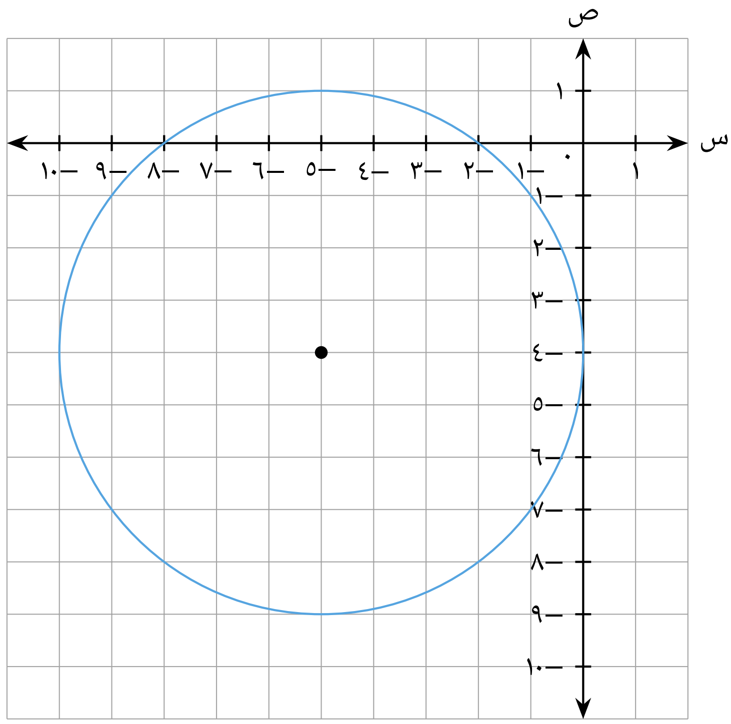
$$س^{٢} - ٨س + ١٦ + ص^{٢} + ١٤ص + ٤٩ - ١٠٠ = ٠.$$

وجمع الحدود المتشابهة:

$$س^{٢} + ص^{٢} - ٨س + ١٤ص - ٣٥ = ٠.$$

مثال ٢: كتابة معادلة الدائرة بمعلومية مركزها

باستخدام الشكل التالي، أوجد معادلة الدائرة.



الحل

في هذا المثال، علينا استخدام التمثيل البياني للتعرُّف على إحداثِيَّي المركز ونصف قطر الدائرة.

إحداثيًا مركز الدائرة هما: (ح، ع) = (–٥، –٤).

لإيجاد نصف القطر، يمكننا، على سبيل المثال، إيجاد الفرق بين إحداثِيَّي ص أعلى نقطة وإحداثِيَّي المركز، ١ – (–٤) = ١ + ٤ = ٥، أو الفرق بين إحداثِيَّي س أبعد نقطة إلى اليمين وإحداثِيَّي المركز: ٠ – (–٥) = ٥. إذن ر = ٥.

نعوِّض بقِيَم ح وع ور في $(\text{س} - \text{ح})^{٢} + (\text{ص} - \text{ع})^{٢} = \text{ر}^{٢}$، ونجد أن $(\text{س} + ٥)^{٢} + (\text{ص} + ٤)^{٢} = ٢٥$.

مثال ٣: كتابة معادلة الدائرة بمعلومية مركزها

أوجد معادلة الدائرة التي تمرُّ بالنقطة م(٠،٨) إذا كان مركزها و(–٢، –٦).

الحل

نبدأ بكتابة المعادلة العامة للدائرة:

$$(\text{س} - \text{ح})^{٢} + (\text{ص} - \text{ع})^{٢} = \text{ر}^{٢}.$$

نعرف أن هذه النقطة $\text{ق}(-٢، -٦)$ هي مركز الدائرة؛ إذن $\text{ح} = -٢$ و$\text{ع} = -٦$. بعد ذلك، نعوِّض بهذه القيم في المعادلة، فنحصل على

$$(\text{س} + ٢)^{٢} + (\text{ص} + ٦)^{٢} = \text{ر}^{٢}.$$

إننا لا نعرف نصف القطر، ولكنَّنا نعرف أن هذه النقطة م تقع على الدائرة؛ لذا فإحداثيَّاها $\text{س} = ٠$ و$\text{ص} = ٨$ لا بد أن يحقِّقا معادلة الدائرة. ومن ثمَّ، يمكننا التعويض عن س وص في المعادلة بهاتين القيمتين لإيجاد ر:

$$\begin{aligned} (٢)^{٢} + (٨ + ٦)^{٢} &= \text{ر}^{٢} \\ ٤ + ١٩٦ &= \text{ر}^{٢} \\ ٢٠٠ &= \text{ر}^{٢}. \end{aligned}$$

وتصبح معادلة الدائرة في النهاية هي:

$$(\text{س} + ٢)^{٢} + (\text{ص} + ٦)^{٢} = ٢٠٠.$$

كيفية إيجاد إحداثيات المركز ونصف القطر من المعادلة في صورة المركز ونصف القطر

بمعلومية معادلة الدائرة في الصورة: $(\text{س} - \text{ح})^{٢} + (\text{ص} - \text{ع})^{٢} = \text{ر}^{٢}$، يكون إحداثيَّا المركز $(\text{ح}، \text{ع})$ ونصف القطر $\text{ر} = \sqrt{\text{ر}^{٢}}$.

مثال ٤: إيجاد إحداثيات المركز ونصف قطر الدائرة من معادلتها في صورة المركز ونصف القطر

أوجد مركز الدائرة ونصف قطرها $(\text{س} - ٢)^{٢} + (\text{ص} + ٨)^{٢} - ١٠٠ = ٠$.

الحل

١. علينا إعادة ترتيب المعادلة على الصورة: $(\text{س} - \text{ح})^{٢} + (\text{ص} - \text{ع})^{٢} = \text{ر}^{٢}$.وسنحصل على $(\text{س} - ٢)^{٢} + (\text{ص} + ٨)^{٢} = ١٠٠$.

٢. من خلال مقارنة المعادلة المُعطاة مع $(\text{س} - \text{ح})^{٢} + (\text{ص} - \text{ع})^{٢} = \text{ر}^{٢}$، نجد أن $\text{ح} = ٢$ و$\text{ع} = -٨$ و$\text{ر}^{٢} = ١٠٠$.

٣. إحداثيَّا المركز هما: $(٢، -٨)$، ونصف القطر $\text{ر} = \sqrt{\text{ر}^{٢}} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$.

كيفية إيجاد إحداثيات المركز ونصف القطر من المعادلة في الصورة العامة

عندما تكون معادلة الدائرة مُعطاة في الصورة العامة: $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{ث}\text{ص} + \text{ء} = ٠$، يجب إعادة كتابة المعادلة على الصورة: $(\text{س} - \text{ح})^{٢} + (\text{ص} - \text{ع})^{٢} = \text{ر}^{٢}$؛ بإكمال مربَّع المقدار $\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س}$، والمقدار $\text{ص}^{٢} + \text{ث}\text{ص}$.

يعطينا هذا $\left(س + \frac{ب}{٢}\right)^{٢} + \left(ص + \frac{ث}{٢}\right)^{٢} = ر^{٢}$، وهو ما يسمح بتحديد مركز الدائرة (ح، ع) = $\left(-\frac{ب}{٢}، -\frac{ث}{٢}\right)$ ونصف قطر الدائرة $ر = \sqrt{ر^{٢}}$.

مثال ٥: إيجاد إحداثيات المركز ونصف قطر الدائرة من معادلتها بالصورة القياسية

بإكمال المربَّع، أوجد مركز الدائرة ونصف قطرها $س^{٢} + ٦س + ص^{٢} - ٤ص + ٨ = ٠$.

الحل

١. علينا إعادة ترتيب المعادلة على الصورة: $(س - ح)^{٢} + (ص - ع)^{٢} = ر^{٢}$؛ بإكمال المربَّع.
٢. وسنجد أن $س^{٢} + ٦س = (س + ٣)^{٢} - ٩$ و$ص^{٢} - ٤ص = (ص - ٢)^{٢} - ٤$.
٣. بالتعويض بهذه القيم في المعادلة الأصلية، نحصل على $(س + ٣)^{٢} - ٩ + (ص - ٢)^{٢} - ٤ + ٨ = ٠$.
٤. من خلال إعادة ترتيبها على الصورة: $(س - ح)^{٢} + (ص - ع)^{٢} = ر^{٢}$، نجد أن $(س + ٣)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٥$.
٥. ونجد أن ح = −٣، وع = ٢، و$ر^{٢} = ٥$.
٦. إحداثيًا المركز هما: (−٣،٢)، ونصف القطر هو: $ر = \sqrt{ر^{٢}} = \sqrt{٥}$.