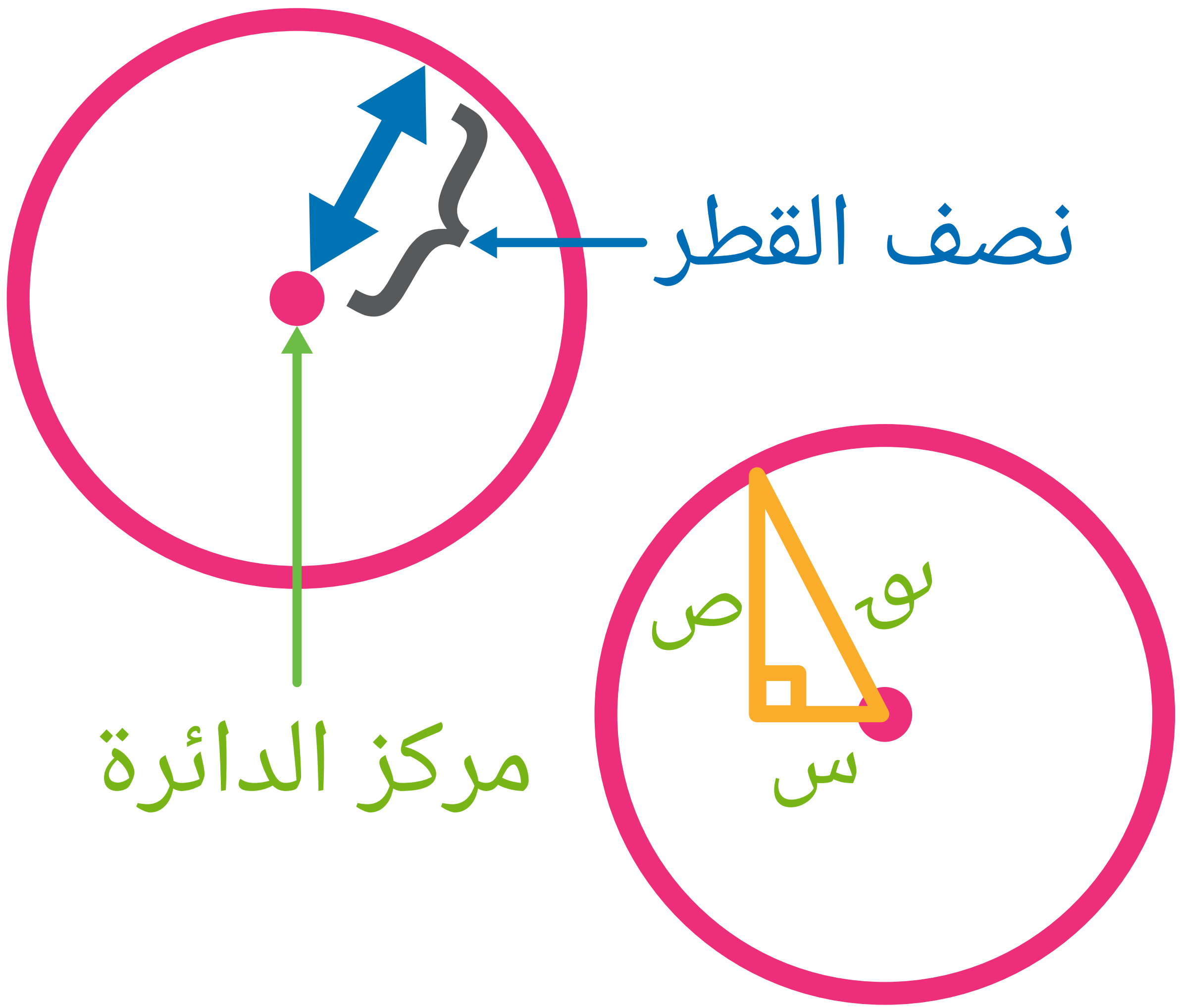
معادلة الدائرة



$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{نق}^{٢}$$

أهداف الدرس

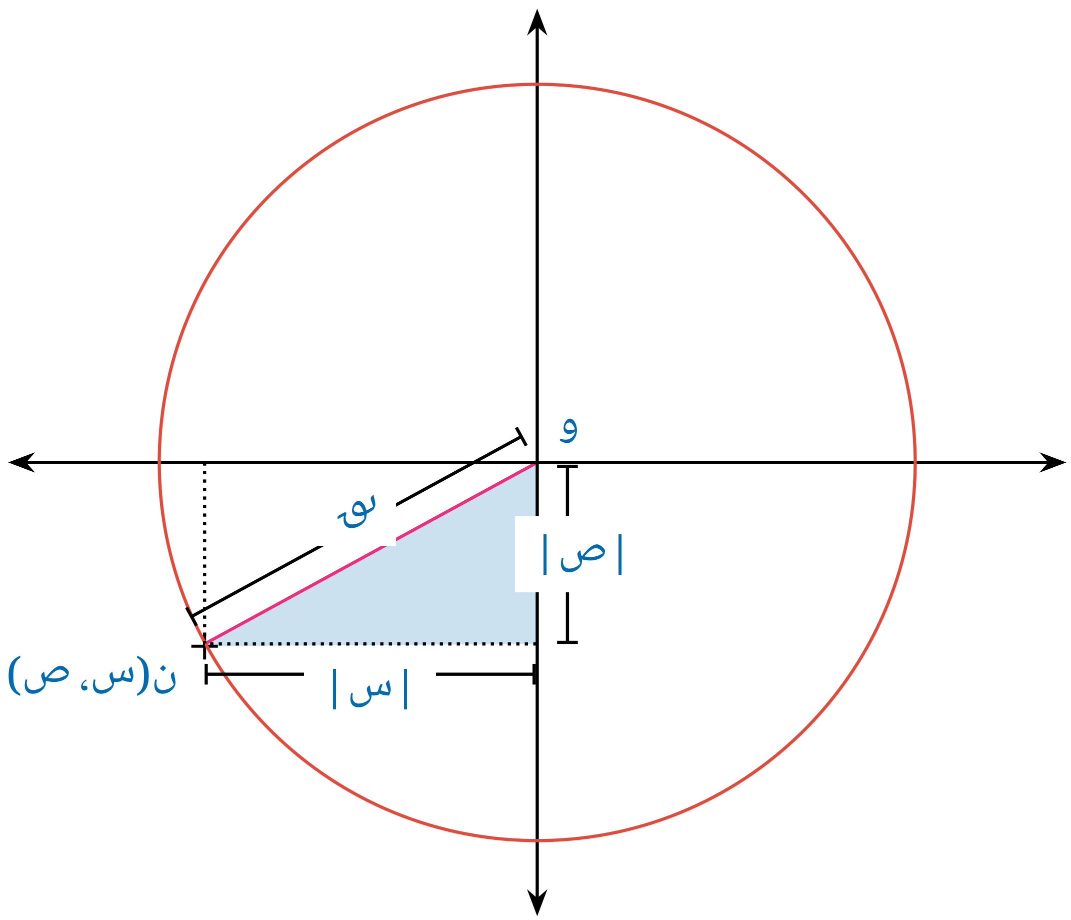
ستتمكَّن من:

- استنتاج وتذكُّر الصورة القياسية لمعادلة الدائرة (س − أ)^{2} + (ص − ب)^{2} = نق^{2}، والصورة العامة أس^{2} + بص^{2} + جـس + ءص + هـ = ٠
- كتابة معادلة دائرة بالصورة القياسية والصورة العامة بمعلومية مركزها ونصف قطرها، أو نقطة عليها
- إيجاد مركز دائرة ونصف قطرها بمعلومية معادلتها المعطاة بالصورة القياسية
- إيجاد مركز دائرة ونصف قطرها بمعلومية معادلتها المُعطاة بالصورة التحليلية (بإكمال المربع)
- إيجاد معادلة دائرة بمعلومية سياق هندسي أوسع مثل معادلة المستقيم الذي يقع عليه مركزها ونقاط تقع عليها

تعريف: الدوائر

الدائرة هي المحلُّ الهندسي لنقاطٍ تقع على مسافات متساوية من نقطة معينة، تُسمَّى مركز الدائرة. هذه المسافة الثابتة بين أيٍّ نقطة على الدائرة ومركزها هي نصف قطر الدائرة.

استنتاج معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند نقطة الأصل



لفهم معادلة الدائرة، دعونا نفترض دائرةً يقع مركزها عند نقطة الأصل للمستوى الإحداثي.

هذه الدائرة هي المحلُّ الهندسي لنقاط تقع على مسافات متساوية من نقطة الأصل. إن المسافة من أيِّ نقطة ن(س، ص) على الدائرة إلى نقطة الأصل هي نصف قطر الدائرة نق. كما أن العلاقة بين الإحداثي س والإحداثي ص لجميع النقاط على الدائرة تُعطَى إذن من خلال رسم مثلث قائم الزاوية، كما هو موضَّح في الشكل؛ حيث يكون الوتر هو نصف قطر الدائرة.

بتطبيق نظرية فيثاغورس على هذا المثلث، نجد أن:

$$|\text{س}|^{٢} + |\text{ص}|^{٢} = \text{نق}^{٢}.$$

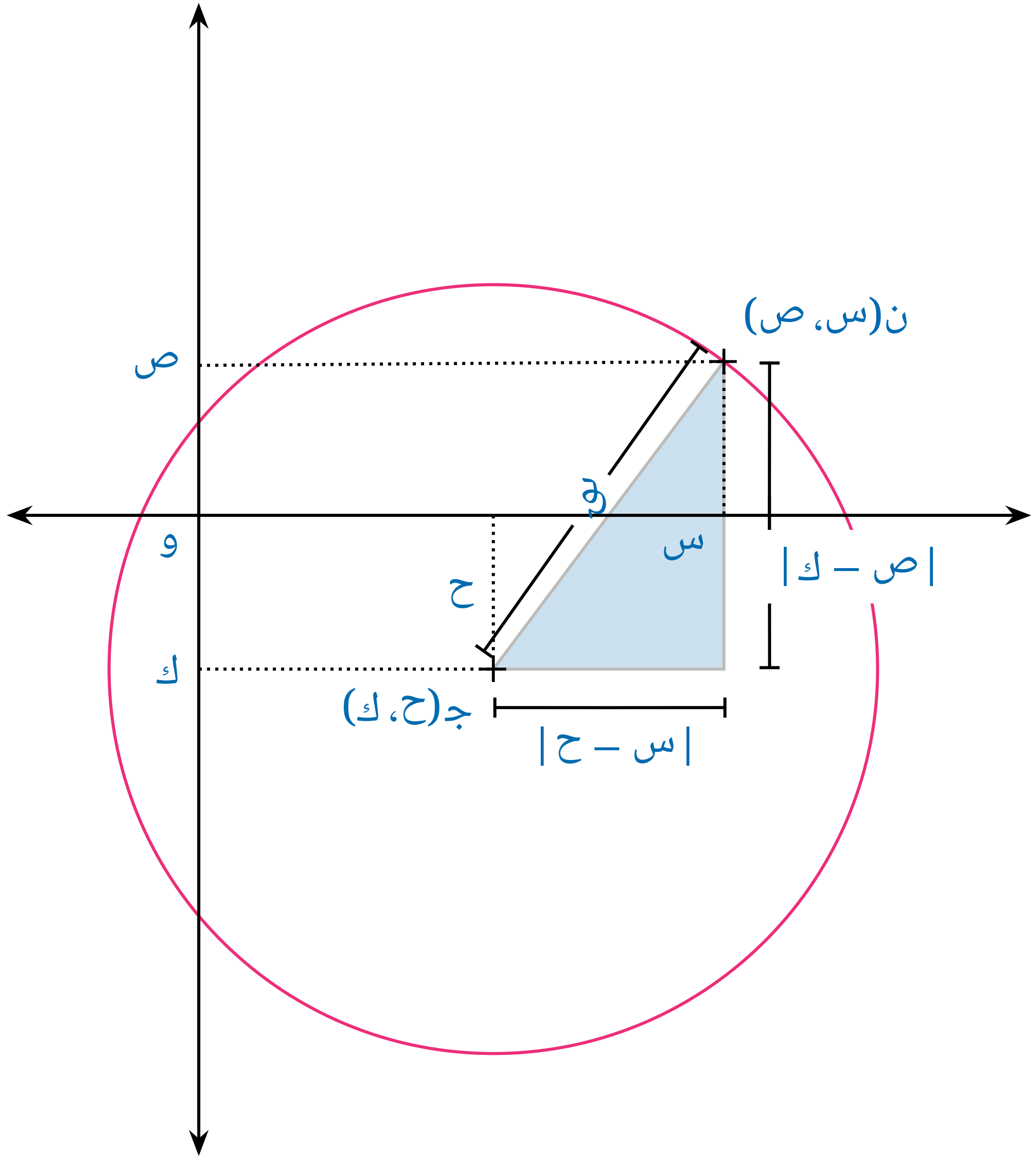
يمكن استخدام هذا التعبير لأيِّ نقطة في الدائرة. يمكن حذف القيم المُطلَقة؛ لأن $|\text{س}|^{٢} = \text{س}^{٢}$، بالنسبة إلى أي قيمة س.

تعريف: معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند نقطة

نصف الدائرة التي يقع مركزها عند (٠،٠) ونصف قطرها نق من خلال المعادلة:

$$س^٢ + ص^٢ = نق^٢.$$

استنتاج معادلة الدائرة في الصورة القياسية



إذا افترضنا دائرة نصف قطرها نق ويقع مركزها عند النقطة جـ (ح، ك)، فأي نقطة تقع على الدائرة تكون على مسافة نق من جـ (ح، ك). إذا افترضنا أي نقطة ن (س، ص) على الدائرة، يمكننا رسم مثلث قائم الزاوية بين المركز وهذه النقطة كما فعلنا من قبل؛ حيث يكون وتر المثلث هو نصف قطر الدائرة، والطولان الأفقي والرأسي هما | س − ح |، | ص − ك | على التوالي.

باستخدام نظرية فيثاغورس في هذا المثلث، نجد أن:

$$|\text{س} - \text{ح}|^{2} + |\text{ص} - \text{ك}|^{2} = \text{نق}^{2}.$$

ومرة أخرى باستخدام حقيقة أن $|\text{أ}|^{2} = \text{أ}^{2}$ بالنسبة إلى أي قيمة أ، يمكننا إعادة كتابة هذه المعادلة من دون القيم المطلقة.

تعريف: معادلة الدائرة (الصورة القياسية)

نصف الدائرة التي يقع مركزها عند جـ (ح، ك)، ونصف قطرها نق من خلال المعادلة:

$(س - ح)^{٢} + (ص - ك)^{٢} = نق^{٢}$.

مثال ١: كتابة الصورة القياسية لمعادلة الدائرة بمعلومية مركزها ونصف قطرها

اكتب معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند (٨،٤) ونصف قطرها ٩.

الحل

$(س - ح)^{٢} + (ص - ك)^{٢} = نق^{٢}$

يمكننا أن نتذكر الصورة القياسية لمعادلة الدائرة.

$ح = ٨$، $ك = ٤$، $نق^{٢} = ٨١$

نحن نعلم هذه القيم بما أننا نعرف أن المركز يقع عند (٨،٤)، ونصف القطر يساوي ٩.

$(س - ٨)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٨١$

بالتعويض بهذه القيم في الصيغة، نحصل على معادلة الدائرة.

مثال ٢: إيجاد مركز الدائرة ونصف قطرها من خلال معادلتها بالصورة القياسية

أوجد مركز الدائرة $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٨)^{٢} - ١٠٠ = ٠$ ونصف قطرها.

الحل

$$(س - ح)^{٢} + (ص - ك)^{٢} = نق^{٢}$$

يمكننا أن نتذكر الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي يقع مركزها عند (ح، ك) ونصف قطرها نق.

$$(س - ٢)^{٢} + (ص - ٨)^{٢} = ١٠٠$$

يمكننا الآن إضافة ١٠٠ إلى كلا الطرفين؛ لجعل المعادلة على الصورة: $(س - ح)^{٢} + (ص - ك)^{٢} = نق^{٢}$.

$$نق^{٢} = ١٠٠، \quad ك = -٨، \quad ح = ٢$$

وأخيرًا نقارن المعادلة بالصورة العامة.

إحداثيًا المركز هما (٢، –٨)، ونصف القطر $نق = \sqrt{١٠٠} = ١٠$.

استنتاج معادلة الدائرة في الصورة العامة

على الرغم من أن معادلة الدائرة التي استخدمناها حتى الآن بالصورة القياسية المستخدمة، توجد صورة عامة للمعادلة. دعونا نتذكر أن الصورة القياسية هي:

$$(\text{س} - \text{ح})^{٢} + (\text{ص} - \text{ك})^{٢} = \text{نق}^{٢}.$$

بفك الأقواس، نحصل على:

$$\text{س}^{٢} - ٢\text{حس} + \text{ح}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{كص} + \text{ك}^{٢} = \text{نق}^{٢}.$$

بإعادة ترتيب المعادلة بحيث تكون حدود س، ص التي لها قوى أكبر موجودة على اليسار، نحصل على:

$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{حس} - ٢\text{كص} + \text{ح}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{نق}^{٢} = ٠.$$

نلاحظ أن -٢ح، -٢ك، $\text{ح}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{نق}^{٢}$ جميعها ثوابت؛ لذلك يمكن كتابتها على صورة أ، ب، ج على الترتيب.

تعريف: معادلة الدائرة (الصورة العامة)

الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي:

$$س^{٢} + ص^{٢} + أس + ب ص + جـ = ٠،$$

حيث أ، ب، جـ ثوابت.

مثال ٣: كتابة الصورة العامة لمعادلة الدائرة بمعلومية مركزها وقطرها

أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها (٨، − ٢) وقطرها ١٠.

الحل

$$س^{٢} + ص^{٢} + أس + ب ص + جـ = ٠$$

يمكننا أن نتذكر الصورة العامة لمعادلة الدائرة؛ حيث أ، ب، جـ جميعها ثوابت يجب تحديدها.

$$(س − ح)^{٢} + (ص − ك)^{٢} = نق^{٢}$$

يمكننا أيضًا أن نتذكر الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي يقع مركزها عند (ح، ك) ونصف قطرها نق.

$$ح = ٨،\ ك = −٢،\ نق = ٥$$

بما أن قطر الدائرة = ١٠ وهو ضعف نصف القطر، نجد أن نصف القطر يساوي ٥.

$$(س − ٨)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٥^{٢}$$

$$= ٢٥$$

بعد ذلك نعوِّض بهذه القيم في المعادلة بالصورة القياسية.

مثال ٣ (متابعة)

$س^{٢} - ١٦س + ٦٤ + ص^{٢} + ٤ص + ٤ = ٢٥$

يمكننا الآن الحصول على هذه الصورة عن طريق فكِّ الأقواس.

$س^{٢} + ص^{٢} - ١٦س + ٤ص + (٦٤ + ٤ - ٢٥) = ٠$

$س^{٢} + ص^{٢} - ١٦س + ٤ص + ٤٣ = ٠$

أخيرًا يمكننا إعادة ترتيب ذلك؛ لكي نحصل على الصورة المطلوبة.

خطوات: إيجاد إحداثيات المركز ونصف القطر لمعادلة دائرة معطاة في الصورة العامة

نفترض أنه لدينا معادلة الدائرة بالصورة العامة $س^٢ + ص^٢ + أس + بص + جـ = ٠$، ونريد إيجاد مركز الدائرة ونصف قطرها. يمكننا فعل ذلك عن طريق إكمال المربع.

- أولًا يمكننا إعادة ترتيب المعادلة كما يأتي:

$$(س^٢ + أس) + (ص^٢ + بص) = -جـ.$$

- نتذكر أنه يمكننا إكمال المربع عن طريق التعويض بالصيغة $س^٢ + أس = \left(س + \frac{أ}{٢}\right)^٢ - \frac{أ^٢}{٤}$. بإكمال المربع لكلٍّ من المقدارين داخل الأقواس في المعادلة، نحصل على:

$$\left(س + \frac{أ}{٢}\right)^٢ - \frac{أ^٢}{٤} + \left(ص + \frac{ب}{٢}\right)^٢ - \frac{ب^٢}{٤} = -جـ.$$

- بعد ذلك يمكننا إعادة ترتيب هذه المعادلة بحيث تكون الثوابت جميعها في الطرف الأيمن منها، فنحصل على:

$$\left(س + \frac{أ}{٢}\right)^٢ + \left(ص + \frac{ب}{٢}\right)^٢ = \frac{أ^٢}{٤} + \frac{ب^٢}{٤} - جـ.$$

- بما أنه لدينا الآن الصورة القياسية لمعادلة الدائرة، يتضح لنا أن المركز يقع عند $\left(\frac{-أ}{٢}، \frac{-ب}{٢}\right)$ ونصف القطر يساوي $\sqrt{\frac{أ^٢}{٤} + \frac{ب^٢}{٤} - جـ}$.

مثال ٤: إيجاد مركز الدائرة ونصف قطرها بمعلومية معادلتها في الصورة العامة

بإكمال المربَّع، أوجد مركز الدائرة $س^{٢} + ٦س + ص^{٢} - ٤ص + ٨ = ٠$، ونصف قطرها.

الحل

لإيجاد المركز ونصف القطر، نبدأ بإكمال المربع عن طريق التعويض.

$$س^{٢} + ٦س = (س + ٣)^{٢} - ٩$$

$$ص^{٢} - ٤ص = (ص - ٢)^{٢} - ٤$$

بعد ذلك نعوِّض بهذه القيم في المعادلة المعطاة.

$$(س + ٣)^{٢} - ٩ + (ص - ٢)^{٢} - ٤ + ٨ = ٠$$

بعد ذلك يمكننا إعادة ترتيب الصيغة $(س - ح)^{٢} + (ص - ك)^{٢} = نق^{٢}$؛ بحيث تكون الثوابت جميعها في الطرف الآخر.

$$(س + ٣)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٥$$

أخيرًا نقارن المعادلة التي لدينا بالصورة القياسية لمعادلة الدائرة؛ حيث الإحداثيان (ح، ك) هما مركز الدائرة ويكون نق هو نصف قطرها.

$$ح = -٣،\ ك = ٢،\ نق^{٢} = ٥$$

إذن مركز الدائرة هو $(-٣، ٢)$ ونصف قطره $نق = \sqrt{٥}$.

مثال ٥: كتابة معادلة دائرة في الصورة القياسية بمعلومية مركزها ونقطة على خط الدائرة

دائرة مركزها (٢، ٢) تمر بالنقطة (٦، ٣). أوجد معادلة الدائرة.

الحل

$(س - ح)^2 + (ص - ك)^2 = نق^2$

يمكننا أن نتذكر الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (ح، ك)، ونصف قطرها نق.

$ح = ٢$، $ك = ٢$

نحن نعرف المركز، لكننا لا نعلم قيمة نصف القطر.

$(س - ٢)^2 + (ص - ٢)^2 = نق^2$

نعوض بالقيمتين ح = ٢، ك = ٢ في الصورة القياسية، ونترك نق كما هو لأننا لا نعرف قيمته.

على الرغم من أننا لا نعرف قيمة نصف القطر، نعلم أن أي نقطة تقع في الدائرة يجب أن تحقق هذه المعادلة. ومن ثَمَّ إذا عوضنا بإحداثيي النقطة (٦، ٣) في المعادلة السابقة، نحصل على قيمة صحيحة لـ $نق^2$.

$(٦ - ٢)^2 + (٣ - ٢)^2 = ٤^2 + ١^2$

$= ١٦ + ١$

$= ١٧$

يمكننا الآن أن نعوض بإحداثيي النقطة (٦، ٣) لإيجاد $نق^2$.

إذن $نق^2 = ١٧$، والمعادلة بالكامل تكون $(س - ٢)^2 + (ص - ٢)^2 = ١٧$.

مثال ٥ (متابعة)

توجد طريقة بديلة لإكمال هذا المثال وهي إيجاد نصف القطر عن طريق حساب المسافة بين المركز والنقطة المعطاة.

إذا كان (٣،٦) نقطة تقع على دائرة، فهذا يعني أن المسافة بينها وبين نقطة المركز (٢،٢) تساوي نصف القطر.

يمكننا أن نتذكر أن المسافة بين نقطتين $(س_١، ص_١)$، $(س_٢، ص_٢)$ تُعطى بالصيغة:

$$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}.$$

بالتعويض بإحداثيي النقطة (٦، ٣)، وإحداثيي النقطة (٢، ٢) في المعادلة، نحصل على:

$$\sqrt{(٦ - ٢)^٢ + (٣ - ٢)^٢} = \sqrt{٤^٢ + ١^٢}$$

$$= \sqrt{١٦ + ١}$$

$$= \sqrt{١٧}.$$

هذه الطريقة تكافئ الطريقة السابقة؛ لأن المعادلة القياسية للدائرة هي في الأصل معادلة للمسافة بين المركز ونقطة متغيرة. ولذلك بغض النظر عما إذا كنا نحسب المسافة مباشرةً، أو بالتعويض بإحداثيي نقطة في المعادلة، فنحن نُجري العملية الحسابية نفسها.

مثال ٦: كتابة معادلة دائرة بمعلومية نقطتين على خط الدائرة وخط مستقيم يمر بالمركز

أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة المارة بالنقطتين أ (−٧، ١)، ب (٠، ٦)، علمًا بأن مركز الدائرة يقع على الخط المستقيم ٦س − ص = −٤٣.

الحل

أولًا يمكننا أن نتذكر الصورة العامة لمعادلة الدائرة؛ حيث أ، ب، جـ ثوابت يجب تحديدها، وهي:

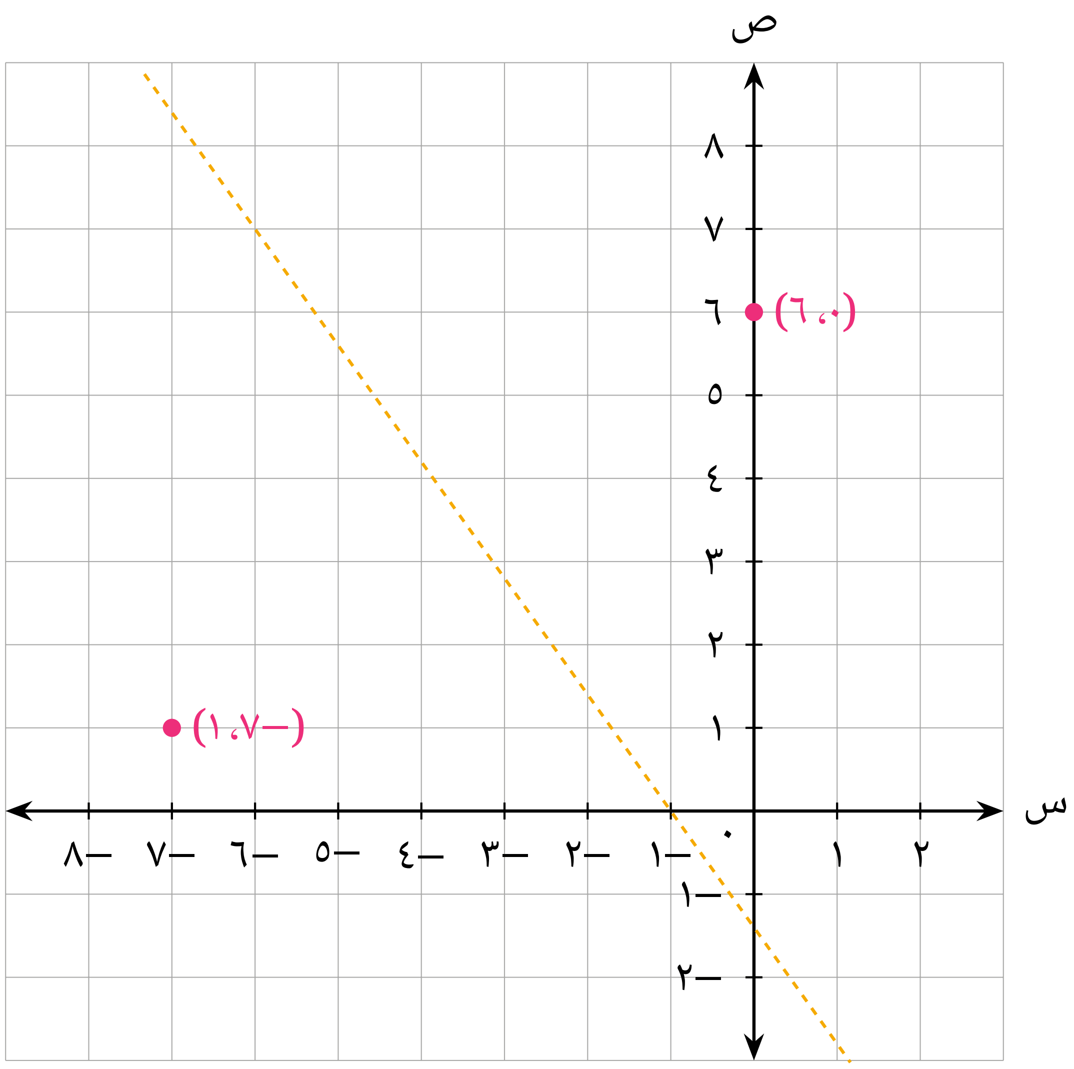
$$\text{س}^{2} + \text{ص}^{2} + \text{أس} + \text{ب ص} + \text{جـ} = ٠.$$

نحن لا نعرف مركز الدائرة، لكننا نعلم نقطتين يقعان على الدائرة، كما أننا نعلم أن جميع النقاط على الدائرة تقع على مسافات متساوية من المركز.

نفترض أن مركز الدائرة م هو $(\text{س}_{\text{م}}، \text{ص}_{\text{م}})$. بما أن المسافتين من المركز إلى كلٍّ من النقطتين (−٧، ١)، (٠، ٦) متساويتان، فهذا يعني أنه يكون لدينا المعادلة الآتية:

$$(\text{س}_{\text{م}} + ٧)^{2} + (\text{ص}_{\text{م}} - ١)^{2} = \text{س}_{\text{م}}^{2} + (\text{ص}_{\text{م}} - ٦)^{2}،$$

مثال ٦ (متابعة)



حيث الطرف الأيسر يكون المسافة المربعة من $(س_م، ص_م)$ إلى (–٧، ١) والطرف الأيمن يكون المسافة المربعة من $(س_م، ص_م)$ إلى (٠، ٦). بفك الأقواس نحصل على:

$$س_م^٢ + ١٤س_م + ٤٩ + ص_م^٢ - ٢ص_م + ١ = س_م^٢ + ص_م^٢ - ١٢ص_م + ٣٦.$$

نلاحظ أنه يُحذف كلٌّ من الحدين $س_م^٢$، $ص_م^٢$ معًا. ومن ثَمَّ بإعادة ترتيب المعادلة؛ بحيث تكون جميع الحدود في الطرف الأيسر، نحصل على:

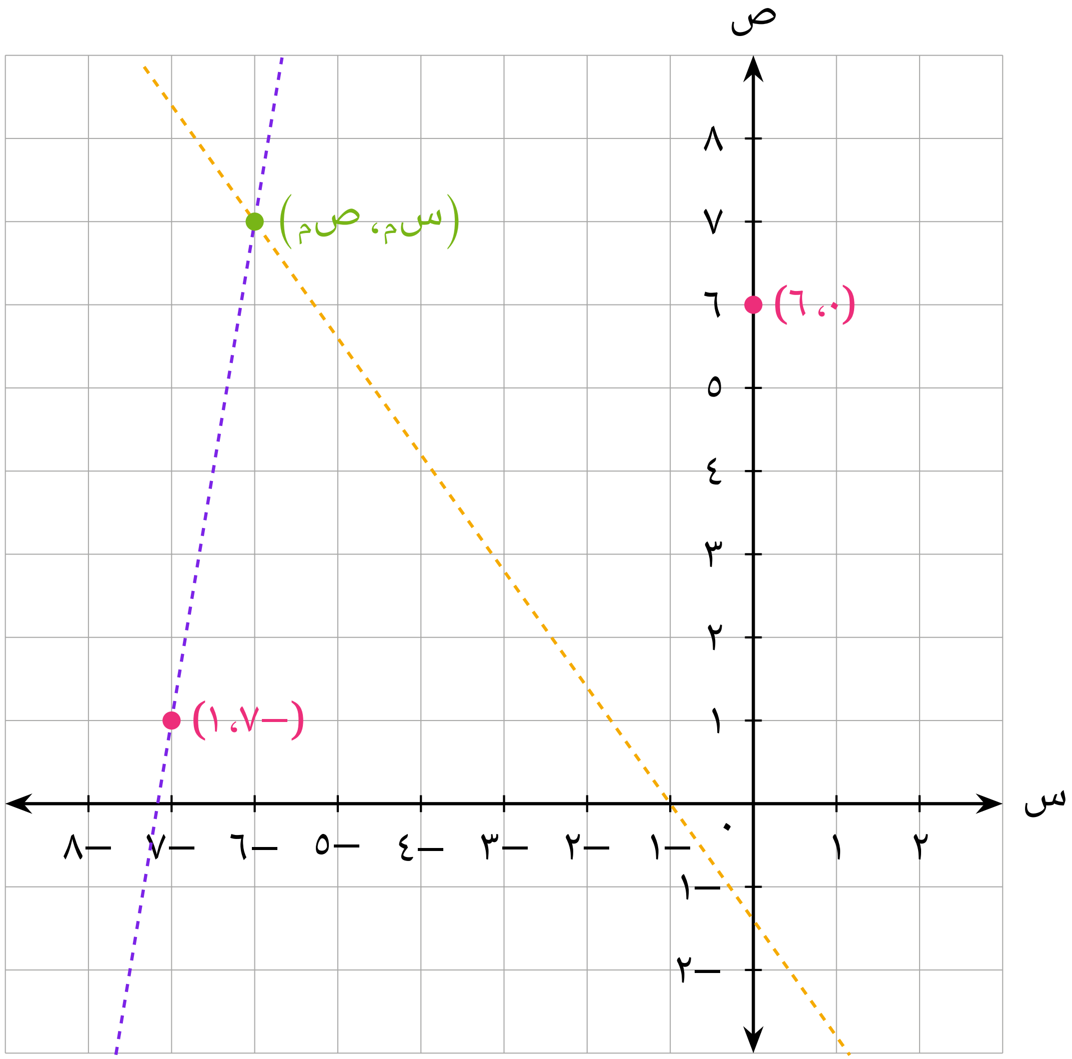
$$١٤س_م + ١٠ص_م + ١٤ = ٠.$$

وبالقسمة على ٢، نحصل على:

$$٧س_م + ٥ص_م + ٧ = ٠.$$

يمكننا أن نلاحظ أن هذه المعادلة توضح لنا أن النقطة م تقع على الخط المستقيم $٧س + ٥ص + ٧ = ٠$.

مثال ٦ (متابعة)



نحن نعلم الآن أن مركز الدائرة يجب أن يقع على هذا المستقيم. لكن هذا غير كافٍ لحل هذه المسألة، ولذلك يمكننا أن نتذكر أننا نعرف أيضًا أن المركز يقع على خط مستقيم مختلف وهو ٦س – ص = –٤٣. وبافتراض أن المستقيمين غير متوازيين، يجب أن يتقاطعا عند نقطة واحدة حيث يكون المركز.

مثال ٦ (متابعة)

يمكننا أن نوجد نقطة التقاطع عن طريق التعويض.

أولًا يمكننا إعادة ترتيب معادلة الخط الثاني بحيث تكون بدلالة ص.

٦س − ص = −٤٣

ص = ٦س + ٤٣

بعد ذلك نعوض بقيمة ص هذه في معادلة الخط المستقيم:
٧س + ٥ص + ٧ = ٠.

٧س + ٥ (٦س + ٤٣) + ٧ = ٠

٧س + ٣٠س + ٢١٥ + ٧ = ٠

٣٧س = −٢٢٢

س = −٦

يمكننا إيجاد الإحداثي ص أيضًا عن طريق التعويض بقيمة س في المعادلة ص = ٦س + ٤٣.

ص = ٦ (−٦) + ٤٣

= ٧

إذن مركز الدائرة يقع عند النقطة (−٦، ٧). بعد ذلك علينا إيجاد نصف قطر الدائرة.

مثال ٦ (متابعة)

أولًا نحسب المسافة من (−٦،٧) إلى نقطة أخرى (دعونا نختر (٠،٦)).

نق^{٢} = (−٦)^{٢} + (٧ − ٦)^{٢}

= ٣٦ + ١

= ٣٧

بعد ذلك نعوض بالقيم ح = −٦، ك = ٧، نق^{٢} = ٣٧.

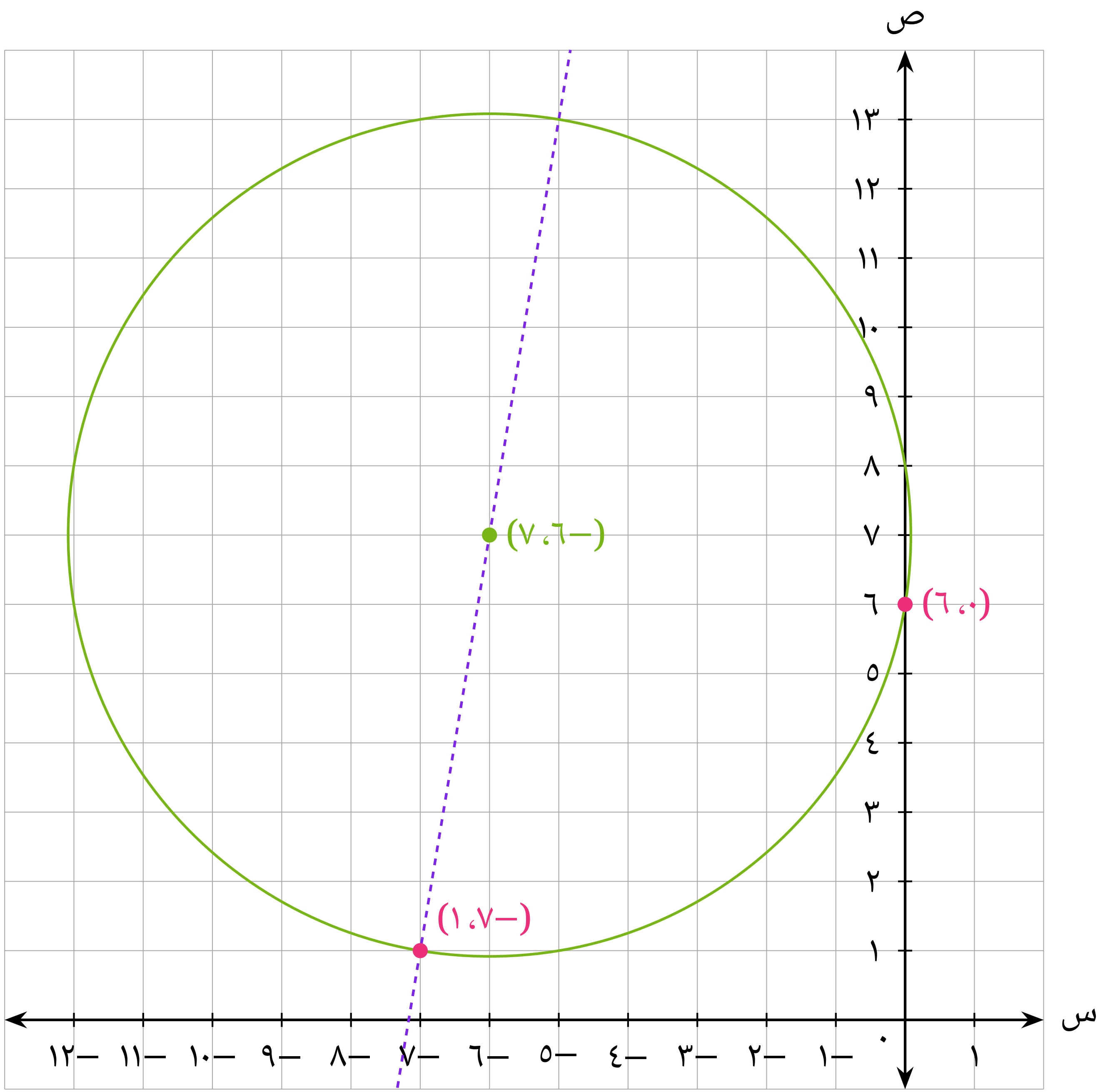
(س + ٦)^{٢} + (ص − ٧)^{٢} = ٣٧

وأخيرًا يمكننا فك الأقواس وإعادة ترتيب المعادلة.

س^{٢} + ١٢س + ٣٦ + ص^{٢} − ١٤ص + ٤٩ = ٣٧

س^{٢} + ص^{٢} + ١٢س − ١٤ص + ٤٨ = ٠

مثال ٦ (متابعة)



بتمثيل هذه المعادلة بيانيًّا، نحصل على المخطط الموجود أمامنا.

النقاط الرئيسية

- معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند (ح، ك)، ونصف قطرها نق هي المعادلة الآتية (في الصورة القياسية):

$$(س - ح)^٢ + (ص - ك)^٢ = نق^٢.$$

- الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي:

$$س^٢ + ص^٢ + أس + ب ص + جـ = ٠،$$

حيث أ، ب، جـ ثوابت.

- يمكن الحصول على الصورة العامة عن طريق فك الأقواس في الصورة القياسية.
- لإيجاد مركز الدائرة ونصف قطرها من خلال معادلة في الصورة العامة، يمكننا إكمال المربع لتحليل المعادلة؛ لكي نحصل على الصورة القياسية.
- في المسائل التي يكون فيها المركز أو نصف القطر غير محدد، يمكننا إيجاد هاتين القيمتين عن طريق الاستنتاج واستخدام خواص الدائرة.