شارح: حساب الكثافة

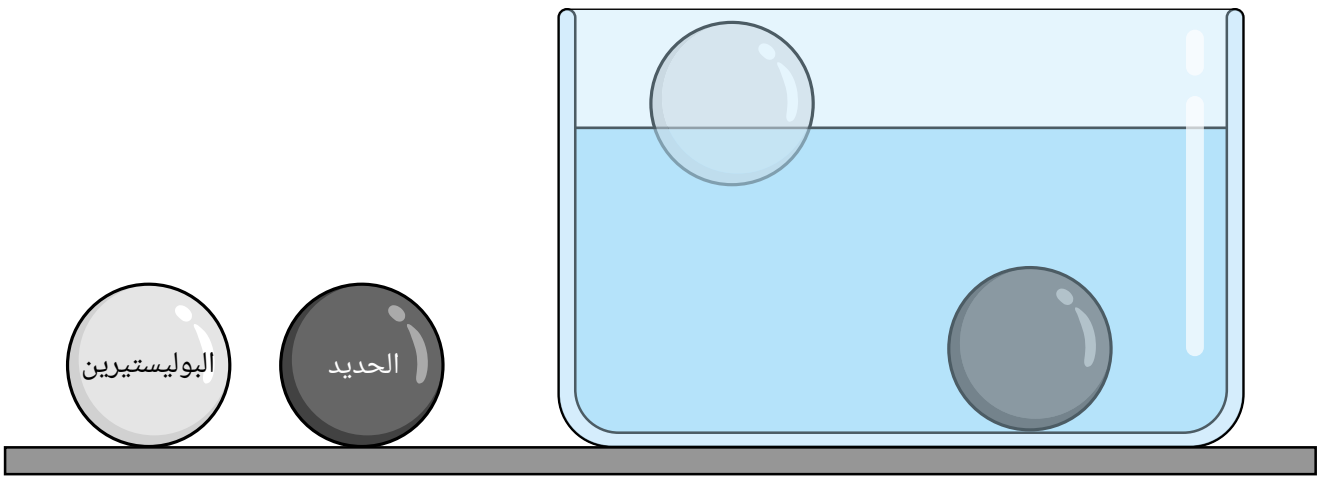
في هذا الشارح، سوف نتعلَّم كيف نستخدم المعادلة: $\rho = \frac{M}{V}$ لحساب كثافة المواد والأجسام المختلفة.

الكثافة خاصية من خواص المواد والأجسام تقيس مقدار الكتلة الموجود في حيِّز محدَّد من الفراغ.

تخيَّل كرتين لهما الحجم نفسه: إحداهما مصنوعة من الحديد والأخرى مصنوعة من البوليستيرين. نعلم بديهيًّا أن الكرة الحديدية ستكون أثقل بكثير من كرة البوليستيرين.

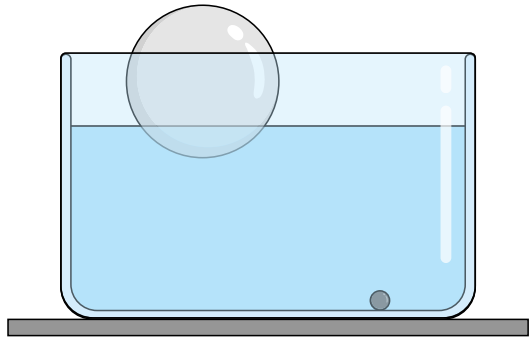
ستكون كتلة الكرة الحديدية أكبر على الرغم من أن لها نفس الحجم؛ لذا يُمكننا القول إن كثافتها أكبر.

ولهذا السبب، على سبيل المثال، تغوص الكرة الحديدية عند وضعها في حوض ماء، بينما تطفو الكرة المصنوعة من البوليستيرين.



على الرغم من أن الكرتين لهما الحجم نفسه، فإن الكرة الحديدية لها كثافة أكبر من الماء، وهو ما يعني أنها ستغوص. أمَّا كثافة كرة البوليسترين فأقلُّ من كثافة الماء بكثير؛ لذا ستطفو.

وستسري هذه القاعدة مهما كان حجم الكرات. فالكثافة هي التي تحدِّد إذا ما كانت الكرة ستطفو أم ستغوص، وليس الحجم. ولهذا، إذا كان لدينا كرة كبيرة للغاية من البوليستيرين، فستطفو أيضًا على الماء. وإذا كانت لدينا كرة حديدية صغيرة جدًّا، فستغوص أيضًا في الماء.



يُشار عادة إلى كثافة الجسم بالحرف اليوناني ρ (الذي يُنطَق «روه»). يُشبه هذا الحرفُ الحرفَ الإنجليزي p، لكن إذا دقَّقنا النظر، فسنجد أنه مختلف قليلًا.

نُعرِّف كثافة جسم ما، ρ، أنها كتلة الجسم، M، مقسومة على حجمه، V. وبوضع ذلك في صورة معادلة، فستكون بهذا الشكل:

$$\rho = \frac{M}{V}.$$

تعريف: الكثافة

الكثافة هي مقدار الكتلة لكل وحدة حجم. والمعادلة الرياضية لكثافة الجسم ρ هي:

$$\rho = \frac{M}{V},$$

حيث M كتلة الجسم، وV حجم الجسم.

أيُّ جسم يتكوَّن بالكامل من مادة واحدة تكون له نفس كثافة أيِّ جسم آخَر مصنوع بالكامل من نفس المادة. على سبيل المثال، كثافة قطعة من الحديد حجمها $1\ \text{m}^3$ تساوي تمامًا كثافة قطعة من الحديد حجمها $100\ \text{m}^3$. كتلتا قطعتَيِ الحديد وحجماهما مختلفان اختلافًا كبيرًا، لكن كثافتَيِ القطعتين متساويتان.

وهذا لأن كثافة القطعة هي نسبة كتلة هذه القطعة إلى حجمها. كلما زاد الحجم، زادت الكتلة أيضًا، لكنْ تظلُّ النسبة بين هاتين الكميتين –أي الكثافة– ثابتة.

لكنَّ بعض الأجسام مكوَّنة من أكثر من مادة. إذا كانت كثافة كلِّ مادة من هذه المواد مختلفة، فستختلف كثافة الجسم بالكامل باختلاف أجزائه.

على سبيل المثال، لنتخيَّل كرةً مصنوعة من البوليستيرين والحديد. يوضِّح الشكل الآتي مقطعًا عرضيًّا في هذه الكرة. الكثافة في الجزء من الكرة المكوَّن من البوليستيرين أقلُّ بكثير من كثافة الجزء المكوَّن من الحديد.

إذا كانت M هي كتلة الكرة بأكملها وV حجم الكرة بأكملها، فإن $\rho = \frac{M}{V}$ سيُعطينا متوسط كثافة الكرة. وستكون قيمة هذه الكثافة في المنتصف بين كثافة البوليستيرين وكثافة الحديد.

من المُهِمِّ أن نتذكَّر هذا الفرق. لكلِّ مادة محدَّدة، تكون كثافة المادة قيمة ثابتة يُمكن ايجادها، وأيُّ جسم يتكوَّن بالكامل من هذه المادة فقط سيكون له هذه الكثافة.

ولكنَّ الجسم المكوَّن من عدَّة مواد تكون قيمة كثافته خاصة به فقط. يمكننا استخدام $\rho = \frac{M}{V}$ حيث M هي كتلة الجسم بأكمله، وV هو حجم الجسم بأكمله، لإيجاد متوسط كثافة الجسم بأكمله.

مثال ١: إيجاد كثافة جسم بمعلومية كتلته وحجمه

مكعب كتلته $30\ \text{kg}$. إذا كان حجم المكعب $0.02\ \text{m}^3$، فما كثافته؟

الحل

يُمكن حساب كثافة الجسم من المعادلة $\rho = \frac{M}{V}$ حيث M كتلة الجسم، وV حجمه.

في هذا السؤال، نعلم من المُعطيات أن كتلة المكعب $M = 30\ \text{kg}$، وحجمه $V = 0.02\ \text{m}^3$.

علينا التعويض بالقيمتين المُعطاتين عن كتلة المكعب وحجمه في معادلة الكثافة. وبذلك نحصل على:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{M}{V}\\ &= \frac{30\ \text{kg}}{0.02\ \text{m}^3}.\end{aligned}$$

هيَّا نقسم هذا الكسر إلى جزء عددي، وجزء خاص بالوحدات. يُمكننا حساب الجزء العددي على أنه $\frac{30}{0.02} = 1\,500$. ببساطة، يُمكننا أن نترك الوحدات في الكسر في صورة كيلوجرام لكل متر مكعب.

وبذلك، تكون إجابتنا النهائية هي:

$$\rho = 1\,500\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

إذا أردنا حساب كثافة مكعب، فيُمكننا فعل ذلك إذا عرفنا كتلته وطول أحد أضلاعه.

تذكَّر أن حجم مكعب طول ضلعه l يُعطَى بالمعادلة:

$$V = l^3.$$

لنرَ بعض الأمثلة على استخدام معادلة الكثافة.

مثال ٢: إيجاد كثافة جسم بدلالة كتلته وأبعاده

مكعب حديدي صغير طول ضلعه $0.15\ \text{m}$. إذا كانت كتلة المكعب $26.6\ \text{kg}$، فما كثافته؟ قرِّب إجابتك لأقرب كيلوجرام لكل متر مكعب.

الحل

في هذا السؤال، لدينا مكعب حديدي كتلته $M = 26.6\ \text{kg}$، وطول ضلعه $l = 0.15\ \text{m}$.

بمعلومية ذلك، المطلوب هو إيجاد الكثافة ρ للمكعب. تذكَّر أن معادلة إيجاد الكثافة هي:

$$\rho = \frac{M}{V}.$$

نعرف كتلة المكعب، لكننا لا نعرف حجمه. يُمكننا إيجاد حجمه باستخدام معادلة حجم المكعب، وهي: $V = l^3$. إذن، لدينا هنا:

$$\begin{aligned} V &= (15\ \text{m})^3 \\ &= 0.15^3\ \text{m}^3 \\ &= 0.003375\ \text{m}^3. \end{aligned}$$

لقد وصلنا الآن إلى نقطة يُمكننا عندها إيجاد كثافة المكعب الحديدي. علينا التعويض بالكتلة $M = 26.6\ \text{kg}$، والحجم $V = 0.003375\ \text{m}^3$ في معادلة الكثافة. وبذلك نحصل على:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{26.6\ \text{kg}}{0.003375\ \text{m}^3}.$$

يُمكننا الآن تبسيط هذه النتيجة من خلال إيجاد القيمة العددية أولًا: $\frac{26.6}{0.003375} = 7\,881.48148$. يُمكننا أن نترك الوحدات كما هي، أيْ تكون بوحدة كيلوجرام لكل متر مكعب. هذا يعني:

$$\rho = 7\,881.48148 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

يطلب منَّا السؤال تقريب الإجابة لأقرب كيلوجرام لكل متر مكعب، وهو ما يعني أن الإجابة النهائية تكون:

$$\rho = 7\,881 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

مثال ٣: إيجاد حجم الجسم بمعلومية كتلته وكثافته

أوجد حجم قالب من الألومنيوم كتلته $54\ \text{kg}$. استخدم القيمة $2\,700\ \text{kg/m}^3$ لكثافة الألومنيوم.

الحل

في هذا السؤال، لدينا كثافة قالب من الألومنيوم، والمطلوب هو إيجاد حجمه. نعلم من المُعطيات أن كتلة هذا القالب، والتي نرمز لها بالرمز M تساوي $54\ \text{kg}$. ونعلم أيضًا أن كثافة مادة الألومنيوم، وهي المادة المصنوع منها القالب، هي $\rho = 2\,700\ \text{kg/m}^3$.

يُمكننا إعادة ترتيب معادلة الكثافة: $\rho = \frac{M}{V}$، واستخدامها لحساب حجم هذا المكعب. إذا ضربنا طرفَيْ معادلة الكثافة في الحجم V، نحصل على:

$$V\rho = M.$$

يُمكننا بعد ذلك قسمة طرفي المعادلة على الكثافة، ρ، وهذا يُعطينا:

$$V = \frac{M}{\rho}.$$

علينا الآن التعويض في هذه المعادلة بالقِيَم المُعطاة عن M، ρ. وبذلك نحصل على:

$$V = \frac{54\ \text{kg}}{2\,700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}.$$

لنقسم هذا الكسر إلى جزء عددي ووحدات. يُمكننا حساب الجزء العددي؛ حيث $\frac{54}{2\,700} = 0.02$.

بالنسبة إلى الوحدات، يُمكننا أولًا قسمة بسط الكسر ومقامه على كيلوجرام، ونلاحِظ أن وحدتَيِ الـ kg تُلغي كلٌّ منهما الأخرى من الكسر. وثانيًا: إذا ضربنا البسط والمقام في متر مكعب، فسنلاحِظ أن وحدة m^3 تُحذَف في المقام، لكن سيظلُّ

لدينا m^3 في الأعلى. هذا يعني أنه يتبقَّى لدينا إجمالًا:

$$V = 0.02\ \mathrm{m}^3.$$

وبذلك يكون الناتِج النهائي هو أن حجم قالب الألومنيوم يساوي $0.02\ \mathrm{m}^3$.

مثال ٤: إيجاد كتلة جسم بدلالة حجمه وكثافته

حُسِب حجم تاج ذهبي مُصمَت فوُجِد أنه يساوي $150\ \mathrm{cm}^3$. أوجد كتلة هذا التاج، باستخدام القيمة $19\,300\ \mathrm{kg/m}^3$ للتعبير عن كثافة الذهب. قرِّب إجابتك لأقرب منزلة عشرية.

الحل

في هذا السؤال، لدينا الحجم V، والكثافة ρ لتاج ذهبي، ومطلوب إيجاد كتلته M.

لنبدأ بأخذ معادلة الكثافة: $\rho = \frac{M}{V}$، وضرب الطرفين في الحجم، V، لنحصل على:

$$M = \rho V.$$

نستنتج من ذلك أن كتلة التاج تساوي كثافة التاج مضروبة في حجمه.

لكنْ قبل حساب الكتلة، يجب أن نلاحِظ أن كثافة التاج مُعطاة بوحدة الكيلوجرام لكل متر مكعب، لكن حجم التاج هنا بوحدة سنتيمتر مكعب.

هذا يعني أنه قبل الشروع في دمج هاتين الكميتين، علينا تحويلهما إلى وحدات متطابقة. هذا يعني هنا أن علينا تحويل الحجم ليكون بوحدة متر مكعب.

تذكَّر أن $100\ \mathrm{cm} = 1\ \mathrm{m}$. وهذا يعني أن $(100\ \mathrm{cm})^3 = 1\ \mathrm{m}^3$؛ ومن ثَمَّ $1\,000\,000\ \mathrm{cm}^3 = 1\ \mathrm{m}^3$.

هذا يعني أن علينا قسمة الحجم بوحدة سنتيمتر مكعب على $1\,000\,000$. وعندئذٍ يكون حجم التاج بوحدة متر مكعب هو:

$$V = 0.00015\ \mathrm{m}^3.$$

يُمكننا الآن التعويض بالقِيَم التي نعرفها عن ρ، V، لإيجاد كتلة التاج:

$$\begin{aligned} M &= \left(19\,300\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right) \times \left(0.00015\ \mathrm{m}^3\right) \\ &= (19\,300 \times 0.00015)\left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \times \mathrm{m}^3\right) \\ &= 2.895\ \mathrm{kg}. \end{aligned}$$

يطلب منَّا السؤال تقريب الإجابة لأقرب منزلة عشرية؛ ومن ثَمَّ فإن الإجابة النهائية لكتلة التاج هي 2.9 kg.

لاحِظ أننا في هذه المسألة، لم نحتج إلى معرفة شكل التاج. فما دمنا نعلم حجم التاج، يُمكننا استخدام معادلة الكثافة لإيجاد كتلته.

يُمكننا حساب كثافة جسم كروي إذا عرفنا كتلته، M، ونصف قطره، r. وإذا عرفنا هاتين الكميتين، فيُمكننا استخدام معادلة الكثافة، وهي:

$$\rho = \frac{M}{V},$$

وكذلك معادلة حجم الكرة، وهي:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

إذا دمجنا هاتين المعادلتين بالتعويض بالتعبير عن حجم الكرة في معادلة الكثافة، فسنجد أن كثافة الكرة تُعطَى بالمعادلة:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3}.$$

إذا ضربنا بسط الكسر ومقامه في ثلاثة، فسنحصل على:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi r^3},$$

لأن معاملات العدد ثلاثة تُلغَى من المقام.

مثال ٥: إيجاد كثافة كرة بمعلومية كتلتها ونصف قطرها

كرة بولينج كتلتها 5.5 kg. ونصف قطرها 7 cm. ما كثافة كرة البولينج؟ قرِّب إجابتك لأقرب كيلوجرام لكل متر مكعب.

الحل

مطلوب منَّا في هذا السؤال أن نحسب الكثافة، ρ، لجسم كروي بمعلومية كتلته ونصف قطره.

كتلة كرة البولينج هنا $M = 5.5\ \text{kg}$، ونصف قطرها $r = 7\ \text{cm}$. لاحِظ أن المطلوب في السؤال هو إيجاد الكثافة بوحدة كيلوجرام لكل متر مكعب؛ لذا سيكون من المفيد لنا أن نحوِّل نصف القطر المُعطى بوحدة سنتيمتر، إلى وحدة متر، قبل الشروع في الحل.

وذلك عن طريق قسمة نصف القطر بوحدة السنتيمتر على 100، إذن $r = 0.07\ \text{m}$.

بما أننا نعرف الآن جميع المعلومات اللازمة، فيُمكننا استخدام معادلة كثافة الكرة، وهي:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi r^3}.$$

كل ما علينا فعله هو التعويض بقيمتَيْ M، r. إذا فعلنا ذلك، سنحصل على:

$$\rho = \frac{3 \times (5.5\ \text{kg})}{4\pi \times (0.07\ \text{m})^3}.$$

إذا أوجدنا ذلك، مع تذكُّر تكعيب العدد والوحدات في المقام، فسنحصل على:

$$\rho = 3828.07\ldots \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

مطلوب منَّا تقريب الإجابة لأقرب كيلوجرام لكل متر مكعب، إذن إجابتنا النهائية هي:

$$\rho = 3\,828 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

مثال ٦: إيجاد حجم جسم ما بمعلومية كتلته وكثافته

كتلة كرة فولاذ $0.034\ \text{g}$. أوجد قُطْر الكرة بالملليمتر، لأقرب ملليمتر. استخدم القيمة $8\,000\ \text{kg/m}^3$ لكثافة الفولاذ.

الحل

في هذا المثال، لدينا كتلة كرة الفولاذ $M = 0.034\ \text{g}$، وكذلك كثافتها $\rho = 8\,000\ \text{kg/m}^3$. بمعلومية ذلك، مطلوب منَّا إيجاد قطر الكرة.

دعونا نُطلِق على قطر الكرة d، وتذكَّر أن القطر يساوي اثنين في نصف القطر. حسنًا، إذا كان نصف قطر الكرة r، فإن $d = 2r$. بوضْع هذا في الاعتبار، دعونا أولًا نحسب نصف قطر الكرة، باستخدام معادلة إيجاد كثافة الكرة.

لنبدأ بإعادة ترتيب معادلة كثافة الكرة، حتى نتمكَّن من استخدامها لإيجاد نصف القطر r. تُعطى كثافة الكرة بالمعادلة:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi r^3}.$$

دعونا أولًا نضرب طرفَيْ هذه المعادلة في r^3. وبذلك نحصل على:

$$\rho r^3 = \frac{3M}{4\pi}.$$

يُمكننا قسمة الطرفين على ρ لنحصل على:

$$r^3 = \frac{3M}{4\pi\rho}.$$

والآن، يتضمن الطرف الأيمن من هذه المعادلة حدودًا نعرف قيمتها.

الخطوة الإضافية الوحيدة هنا هي تحويل كتلة الكرة، المُعطاة لنا بالجرام، إلى الكيلوجرام. نريد فعل ذلك؛ لأن كثافة الفولاذ مُعطاة بوحدة كيلوجرام لكل متر مكعب.

نفعل ذلك بقسمة الكتلة بالجرام على 1 000، إذن كتلة الكرة:

$$M = 0.000034\ \text{kg}.$$

سيكون من الأسهل بكثير التعامل مع هذا الرقم إذا كتبناه بالصيغة العلمية. وبذلك نحصل على $M = 3.4 \times 10^{-5}\ \text{kg}$.

يُمكننا التعويض بقِيَم M، ρ لنحصل على:

$$r^3 = \frac{3 \times (3.4 \times 10^{-5}\ \text{kg})}{4\pi\,(8\,000\ \text{kg/m}^3)}.$$

لاحِظ أن وحدة القياس kg تُلغَى، وتصبح الوحدة الناتِجة m^3. يُمكننا أيضًا حساب الجزء العددي من هذا الكسر:

$$\frac{3 \times 3.4 \times 10^{-5}}{4\pi \times 8\,000} = 1.0146 \times 10^{-9}.$$

هذا يعني أننا أوجدنا قيمة نصف القطر تكعيب، وهي:

$$r^3 = 1.0146 \times 10^{-9}\ \text{m}^3.$$

علينا الآن أخذ الجذر التكعيبي لهذا التعبير لإيجاد نصف قطر الكرة، وهذا يعطينا:

$$r = 0.001004847\ldots\ \text{m},$$

حيث أخذنا الجذر التكعيبي للوحدات وكذلك العدد. يطلب منَّا السؤال كتابة الإجابة بوحدة المليمتر؛ لذا دعونا نحوِّل إجابتنا (بوحدة المتر) إلى المليمتر. وذلك عن طريق الضرب في 1 000، وبهذا يكون:

$$r = 1.004847\ldots\ \text{mm}.$$

علينا ضرب نصف القطر r في اثنين لإيجاد قطر الكرة d، كما هو مطلوب في السؤال. وبالتقريب لأقرب ملليمتر، نحصل على:

$$d = 2r = 2\ \text{mm}.$$

هذه هي الإجابة النهائية: قطر الكرة يساوي 2 mm.

وقد نحتاج أيضًا إلى حساب كثافة جسم له أبعاد أقلُّ انتظامًا، مثل متوازي مستطيلات طوله l، وعرضه w، وارتفاعه h.

في هذه الحالة، حجم متوازي المستطيلات، V، يساوي:

$$V = lwh.$$

هذا يعني أنه بدمج معادلة الحجم هذه ومعادلة الكثافة، نجد أن كثافة أيِّ متوازي مستطيلات مصنوع من مادة ما تساوي:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{lwh}.$$

مثال ٧: إيجاد كثافة جسم بدلالة كتلته وأبعاده

قالب طوب كتلته 3.5 kg. القالب على شكل متوازي مستطيلات أطوال أضلاعه 23 cm، 11 cm، 7 cm. ما كثافة قالب الطوب؟ قرِّب إجابتك لأقرب كيلوجرام لكل متر مكعب.

الحل

في هذا السؤال، لدينا أبعاد وكتلة متوازي مستطيلات، والمطلوب منَّا إيجاد كثافته.

لا يُهِمُّ أيُّ الأبعاد نُطلِق عليها الطول أو الارتفاع أو العرض. في هذا المثال، لنفترض أن الطول هو أطول ضلع؛ إذن $l = 23$ cm. لنفترض أن العرض هو الطول الأوسط؛ إذن $w = 11$ cm. وأخيرًا، لنفترض أن الارتفاع أقصر طول؛ إذن $h = 7$ cm.

لاحِظ أن هذه الأطوال كلها بوحدة السنتيمتر، لكن المطلوب حساب الكثافة بوحدة الكيلوجرام لكل متر مكعب. لذا سيكون من الأسهل تحويل المسافات إلى وحدة المتر قبل الشروع في حساب الكثافة. وذلك بقسمة كل مسافة بوحدة السنتيمتر على 100، وبهذا، يُمكن كتابة أبعاد قالب الطوب هكذا:

$$l = 0.23 \text{ m},$$
$$w = 0.11 \text{ m},$$
$$h = 0.07 \text{ m}.$$

هذا يعني أننا جاهزون لحساب كثافة قالب الطوب. نستخدم هذه الأبعاد إلى جانب كتلة قالب الطوب المذكور في السؤال، وهي 3.5 kg. وهذا يُتيح لنا حساب الكثافة:

$$\rho = \frac{M}{lwh} = \frac{3.5 \text{ kg}}{(0.23 \text{ m})(0.11 \text{ m})(0.07 \text{ m})}.$$

يُمكننا أولًا تبسيط الوحدات، لتصبح بوحدة كيلوجرام لكل متر مكعب، ثم حساب القيمة العددية:

$$\frac{3.5}{(0.23) \times (0.11) \times (0.07)} = 1976.28 \ldots .$$

وبالتقريب لأقرب كيلوجرام لكل متر مكعب، تكون كثافة قالب الطوب:

$$\rho = 1\,976\frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

وهذه هي الإجابة النهائية.

النقاط الرئيسية

- الكثافة خاصية من خواص المادة، تقيس الكتلة لكلِّ وحدة حجم من المادة، ويُمكن كتابتها على الصورة:

$$\rho = \frac{M}{V},$$

حيث ترمز ρ لكثافة المادة، وM للكتلة وV للحجم.

- بالنسبة إلى أيِّ مادة، تكون الكثافة ثابتة بغضِّ النظر عن شكل الجسم المصنوع من هذه المادة.
- يُمكننا دمج معادلة الكثافة ومعادلة الحجم لأشكال محدَّدة من الأجسام. على وجه التحديد، حجم مكعب طول ضلعه l يساوي $V = l^3$.
- حجم متوازي مستطيلات طوله l، وعرضه w، وارتفاعه h، يساوي $V = lwh$.
- حجم كرة نصف قطرها r يساوي $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.