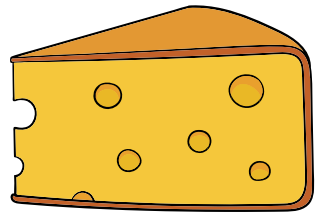
شارح: الخطأ في القياس

في هذا الشارح، سوف نتعلَّم كيف نعرِّف ونحسب الأخطاء المطلقة والنسبية للقيم المَقيسة.

عند قياس قيمةٍ ما، من المهم أن تكون قادرًا على معرفة إلى أيِّ مدًى يكون القياس مضبوطًا. وعند تحديد الضبط، يجب مقارنة القيمة بقيمة أخرى يُعتدُّ بها لكونها صحيحة، وهي **القيمة المعيارية**.

إن **القيمة المعيارية**، التي تسمى أيضًا القيمة الفعلية، هي القيمة المَقيسة التي نحصل عليها من خلال عملية قياس خالية من الأخطاء. وهي القيمة التي تُقارَن بها جميع القيم المَقيسة الأخرى. وعادةً ما تُمثِّل القيم المعيارية ثوابتَ، مثل ثابت الجاذبية أو شحنة الإلكترون.

يحدث **خطأ القياس** عندما تختلف قيمة القياس عن القيمة المعيارية. إذا عرَفنا أن كتلة قطعة جبن تساوي 1 kg، لكن أشار ميزان إلى أن كتلتها تساوي 1.2 kg، فهذا مثال على خطأ القياس.



القيمة المعيارية 1 kg

القيمة المَقيسة 1.2 kg

أيًّا ما يكن مصدر الخطأ، فثمة طريقتان مختلفتان لحساب قيمته. هيا نلقِ نظرة على **الخطأ المطلق**.

الخطأ المطلق هو الفرق المطلق بين القيمة المعيارية والقيمة المَقيسة. عند التعبير عنه في صورة معادلة، تبدو كما يلي:

$$\text{الخطأ المطلق} = |\text{القيمة المعيارية} - \text{القيمة المَقيسة}|.$$

يشير الخطَّان في الطرف الأيسر من المعادلة إلى أن الفرق يمثِّل قيمة مطلقة. القيمة المطلقة تعني مقدار العدد فحسب، ما يعني أنها تكون موجبة دائمًا، حتى إذا كانت القيمة المَقيسة أكبر من القيمة المعيارية.

في حالة الجبن، القيمة المعيارية هي 1 kg، والقيمة المَقيسة هي 1.2 kg. بالتعويض بهاتين القيمتين في المعادلة نحصل على:

$$|1\text{ kg} - 1.2\text{ kg}| = 0.2\text{ kg}.$$

إذن، بالرغم من أن $1.2 - 1$ يساوي سالب 0.2، فإنه يصير موجبًا، لأننا نحسب القيمة المطلقة. من ثَمَّ، فالخطأ المطلق للجبن يساوي $0.2\ \text{kg}$.

لنلقِ نظرة على مثال.

مثال ١: حساب الخطأ المطلق في قياس القيمة المعيارية

في إحدى التجارب، قيست عجلة الجاذبية عند سطح الأرض فكانت $9.90\ \text{m/s}^2$. أوجد الخطأ المطلق في القياس باستخدام القيمة المعيارية $9.81\ \text{m/s}^2$.

الحل

لإيجاد الخطأ المطلق في قيمة القياس $9.90\ \text{m/s}^2$، لا بد أن نحسب الفرق بينها وبين القيمة المعيارية $9.81\ \text{m/s}^2$، كما هو موضح في معادلة الخطأ المطلق. تذكر أن معادلة الخطأ المطلق هي:

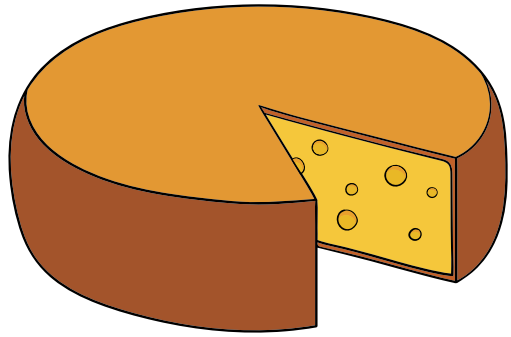
$$\text{الخطأ المطلق} = |\text{القيمة المعيارية} - \text{القيمة المَقيسة}|.$$

القيمة المعيارية هي $9.81\ \text{m/s}^2$، والقيمة المَقيسة هي $9.90\ \text{m/s}^2$، إذن، بالتعويض بهاتين القيمتين في معادلة الخطأ المطلق نحصل على:

$$|9.81\ \text{m/s}^2 - 9.90\ \text{m/s}^2| = 0.09\ \text{m/s}^2.$$

الخطأ المطلق قيمة مطلقة؛ لذا يكون موجبًا دائمًا، على الرغم من أن $9.90 - 9.81$ يساوي عددًا سالبًا. من ذلك، فإن الخطأ المطلق يساوي $0.09\ \text{m/s}^2$.

لا يساعدنا الخطأ المطلق دائمًا في تحديد ضبط القياس. لنفترض أن لدينا قرص جبن ضخمًا كتلته المعيارية تساوي $1\,000\ \text{kg}$. عند وضع قرص الجبن على ميزان، تكون كتلته المَقيسة $1000.2\ \text{kg}$.



القيمة المعيارية $1\,000\ \text{kg}$

القيمة المَقيسة $1\,000.2\ \text{kg}$

باستخدام هاتين القيمتين، نجد أنه عند كتابتهما في معادلة الخطأ المطلق:

$$|1\,000\ \text{kg} - 1\,000.2\ \text{kg}| = 0.2\ \text{kg},$$

تكون قيمة الخطأ المطلق في قرص الجبن الضخم الذي تبلغ كتلته $1\,000\ \text{kg}$ مساوية لقيمة الخطأ المطلق في قطعة الجبن الأصغر للغاية التي تبلغ كتلتها $1\ \text{kg}$. تكون القيمة $0.2\ \text{kg}$ ذات أهمية أكبر في حالة الكتل الصغيرة مقارنة بالكتل الكبيرة، وهناك طريقة للتعبير عن هذا المفهوم، وهي **الخطأ النسبي**.

الخطأ النسبي طريقة لتوضيح الخطأ بالنسبة للقيمة المعيارية. ويُحسَب عن طريق قسمة الخطأ المطلق على القيمة المعيارية:

$$r = \frac{\Delta x}{x_0},$$

حيث r الخطأ النسبي، وΔx الخطأ المطلق، وx_0 القيمة المعيارية.

لكلٍّ من قرص الجبن الضخم وقطعة الجبن قيمة الخطأ المطلق نفسها، $0.2\ \text{kg}$. وبما أن لقرص الجبن الضخم قيمة معيارية أكبر بكثير، فعلينا أن نتوقع أن يكون الخطأ النسبي أصغر مقارنة بقطعة الجبن الواحدة. الخطأ النسبي للقرص هو:

$$\frac{0.2\ \text{kg}}{1\,000\ \text{kg}} = 0.0002,$$

والخطأ النسبي للقطعة هو:

$$\frac{0.2\ \text{kg}}{1\ \text{kg}} = 0.2.$$

لاحظ أنه نظرًا لأن الوحدات هي نفسها في كلٍّ من بسط المعادلة ومقامها، تُحذف هاتان الوحدتان، ما يجعل الخطأ النسبي بلا وحدة.

هيا نلقِ نظرة على بعض الأمثلة.

مثال ٢: حساب الخطأ المطلق من الخطأ النسبي

إذا كان الخطأ النسبي في قياس مساحة $320\ \text{m}^2$ هو 0.03، فاحسب الخطأ المطلق لهذا القياس.

الحل

لدينا في البداية قيمتان، وهما الخطأ النسبي، 0.03، والقيمة المعيارية، $320\ \text{m}^2$. علينا إيجاد الخطأ المطلق، ويمكننا إيجاده بالنظر إلى معادلة الخطأ النسبي. تذكر أن معادلة الخطأ النسبي هي:

$$r = \frac{\Delta x}{x_0},$$

حيث r الخطأ النسبي، وΔx الخطأ المطلق، وx_0 القيمة المعيارية.

لجعل الخطأ المطلق، Δx، في طرف بمفرده، علينا التفكير جبريًا. لنضرب طرفَي المعادلة في القيمة المعيارية، x_0:

$$r \times x_0 = \frac{\Delta x}{x_0} \times x_0,$$

وهو ما يَحذف القيمة المعيارية في الطرف الأيمن من المعادلة، لنحصل على:

$$r \times x_0 = \Delta x.$$

باستخدام هذه المعادلة، يمكننا الآن التعويض بالقيم المعطاة. الخطأ النسبي يساوي 0.03، والقيمة المعيارية تساوي $320\ \text{m}^2$:

$$0.03 \times 320\ \text{m}^2 = 9.6\ \text{m}^2.$$

الخطأ النسبي ليس له وحدة؛ لذا فإن ناتج عملية الضرب تكون وحدته m^2. من ثَمَّ، فإن قيمة الخطأ المطلق هي $9.6\ \text{m}^2$.

مثال ٣: تحديد القياس الأكثر ضبطًا

أي القياسات الآتية للزمن هي الأكثر ضبطًا؟

أ. $3.4 \pm 0.1\ \text{s}$

ب. $5.2 \pm 0.01\ \text{s}$

جـ. $7.3 \pm 0.2\ \text{s}$

د. $4.1 \pm 0.2\ \text{s}$

الحل

الرمز ± يعني زائد أو ناقص قيمة معينة، والعدد الذي يليه هو الخطأ المطلق. لتحديد قياس الزمن الأكثر ضبطًا، علينا إيجاد الخطأ النسبي؛ لأن القياس الذي له أقل خطأ نسبي هو القياس الأكثر ضبطًا. تذكر أن معادلة الخطأ النسبي هي الخطأ المطلق مقسومًا على القيمة المعيارية:

$$r = \frac{\Delta x}{x_0}.$$

في هذه المسألة، الخطأ المطلق هو العدد الذي يلي الرمز ±، والقيمة المعيارية هي القيمة التي تأتي قبله. لننظر إلى كل إجابة محتملة على حدة، بدءًا من الخيار (أ):

$$\frac{0.1\ \text{s}}{3.4\ \text{s}} = 0.029.$$

بعد ذلك، الخطأ النسبي لـ (ب) هو:

$$\frac{0.01\ \text{s}}{5.2\ \text{s}} = 0.002,$$

والخطأ النسبي لـ (ج) هو:

$$\frac{0.2\ \text{s}}{7.3\ \text{s}} = 0.027,$$

والخطأ النسبي لـ (د) هو:

$$\frac{0.2\ \text{s}}{4.1\ \text{s}} = 0.049.$$

كما نلاحظ، فإن للإجابة (ب) أصغر خطأ نسبي، وهو 0.002 فقط. كان بإمكاننا أيضًا تحديد ذلك بالنظر إلى الأخطاء المطلقة لكل خيار؛ فالأخطاء المطلقة الأصغر بكثير ستعطي أيضًا أخطاءً نسبية أصغر.

عادة ما يُعبَّر عن الخطأ النسبي بإضافة تعديل بسيط، ممَّا يجعله في صورة نسبة مئوية.

الخطأ النسبي المئوي هو الخطأ النسبي الذي يُعبَّر عنه في صورة نسبة مئوية، ويتم حسابه بضرب القيمة في 100%:

$$r \times 100\% = r_{\%},$$

حيث $r_{\%}$ هو الخطأ النسبي المئوي.

بالعودة إلى الجبن مرة أخرى، نجد أن الخطأ النسبي لقطعة الجبن الصغيرة كان 0.2. وعليه، فإن الخطأ النسبي المئوي يساوي:

$$0.2 \times 100\% = 20\%,$$

إذن، فإن قطعة الجبن لها خطأ نسبي مئوي مقداره 20%، أو إن القياس كان خطأً بنسبة 20%.

الخطأ النسبي المئوي لقرص الجبن الضخم أقل بكثير:

$$0.0002 \times 100\% = 0.02\%.$$

هذا الفرق الكبير في النسبة المئوية للخطأ بالنسبة إلى القطع الأصغر من الجبن يعني أن أخطاء القياس ستتراكم بشكل أسرع. على سبيل المثال، إذا كنت مكلَّفًا بقياس 1 000 kg من الجبن، فإن اختيار قرص واحد ضخم كتلته 1 000 kg سيؤدي إلى خطأ نسبي مئوي مقداره 0.02%. أما إن اخترت بدلًا من ذلك 1 000 من القطع الصغيرة، فسيكون لديك خطأ نسبي مئوي أكبر؛ أي 20%.

للحصول على قيمة كمية الجبن بوحدة الكيلوجرام التي يُمثِّلها الخطأ النسبي المئوي، نقسم الخطأ النسبي المئوي على 100% للتحويل مرة أخرى إلى الخطأ النسبي. وبالمقارنة بين الاثنين، نجد أن الخطأ النسبي في قرص الجبن الضخم يساوي:

$$1\,000\ \text{kg} \times \frac{0.02\%}{100\%} = 0.2\ \text{kg},$$

في حين أن الخطأ النسبي في القطعة الأصغر من الجبن هو:

$$1\,000\ \text{kg} \times \frac{20\%}{100\%} = 200\ \text{kg}.$$

إذن، في حين تختلف كتلة القرص الضخم فقط بمقدار 0.2 kg، فإن اختيار استخدام مجموعة من 1 000 قطعة جبن صغيرة بدلًا من القرص سيؤدي إلى اختلاف الكتلة بمقدار 200 kg. إن الحصول على كتلة تتراوح بين 800 و1 200 kg من الجبن عندما كان من المفترض أن تحصل على 1 000 kg يُعد خطأً كبيرًا.

بما أن الخطأ النسبي يعتمد على الخطأ المطلق والقيمة المعيارية، تُكتب معادلة الخطأ النسبي المئوي، $r_{\%}$، على الصورة:

$$r_{\%} = \frac{\Delta x}{x_0} \times 100\%,$$

حيث Δx الخطأ المطلق، وx_0 القيمة المعيارية.

لنلقِ نظرة على بعض الأمثلة التي نستخدم فيها الخطأ النسبي المئوي.

مثال ٤: حساب الخطأ النسبي عند قياس قيمة معيارية

في إحدى التجارب، كانت سرعة الموجات الصوتية على الأرض عند مستوى سطح البحر عند درجة حرارة 21°C تساوي 333 m/s. أوجد قيمة الخطأ النسبي المئوي في القياس باستخدام القيمة المعيارية التي تساوي 344 m/s. قرِّب إجابتك لأقرب منزلة عشرية.

الحل

في هذه المسألة، القيمتان المعطاتان هما القيمة المَقيسة 333 m/s، والقيمة المعيارية 344 m/s. تذكر معادلة الخطأ النسبي المئوي:

$$r_{\%} = \frac{\Delta x}{x_0} \times 100\%,$$

حيث Δx الخطأ المطلق، وx_0 القيمة المعيارية.

نحتاج إلى حساب الخطأ المطلق، ويمكننا حسابه من خلال حساب الفرق بين القيمة المَقيسة والقيمة المعيارية:

$$344\ \text{m/s} - 333\ \text{m/s} = 11\ \text{m/s}.$$

يُحسب الخطأ النسبي بقسمة الخطأ المطلق، 11 m/s، على القيمة المعيارية، 344 m/s:

$$\frac{\Delta x}{x_0} = \frac{11\ \text{m/s}}{344\ \text{m/s}}$$
$$\frac{11\ \text{m/s}}{344\ \text{m/s}} = 0.03197\ldots,$$

لنحصل على خطأ نسبي يساوي ... 0.03197. يجب أن تكون الإجابة في النهاية لأقرب منزلة عشرية، لكنها لا تقرَّب حتى نهاية المسألة للحصول على أعلى دقة ممكنة. لحساب الخطأ النسبي المئوي، نضرب هذه القيمة في 100%:

$$0.03197\ldots \times 100\% = 3.197\ldots\%.$$

والآن بعد أن أصبحت الإجابة في صورتها النهائية، يمكن تقريبها إلى أقرب منزلة عشرية، فيكون الخطأ النسبي المئوي 3.2%.

مثال ٥: تحديد القيمة الفعلية من الخطأ المطلق والخطأ النسبي لها

وُجِدَ أن الخطأين النسبي والمُطلَق في قياس كتلة صندوق يساويان 1.6% و0.4 kg على الترتيب. احسب القيمة الفعلية للكتلة.

الحل

القيمة الفعلية هي القيمة المعيارية، ويمكن حسابها باستخدام معادلة الخطأ النسبي المئوي:

$$\frac{\Delta x}{x_0} \times 100\% = r_{\%},$$

حيث Δx الخطأ المطلق، وx_0 القيمة المعيارية.

نحتاج إلى جعل القيمة المعيارية، x_0، في طرف بمفردها، وهو ما يمكن فعله جبريًا. لنبدأ بضرب الطرفين في القيمة المعيارية:

$$\frac{\Delta x}{x_0} \times 100\% \times x_0 = r_{\%} \times x_0.$$

وهذا يؤدي إلى حذف القيم المعيارية من الطرف الأيسر، ليتبقى لنا:

$$\Delta x \times 100\% = r_{\%} \times x_0.$$

بعد ذلك، يمكن قسمة كلا الطرفين على الخطأ النسبي المئوي، لنحصل على:

$$\frac{\Delta x \times 100\%}{r_{\%}} = \frac{r_{\%} \times x_0}{r_{\%}},$$

بحذف الخطأ النسبي المئوي من الطرف الأيمن، نحصل على معادلة بها القيمة المعيارية في طرف بمفردها:

$$\frac{\Delta x \times 100\%}{r_{\%}} = x_0.$$

الآن، يمكننا التعويض بقيمة الخطأ المطلق، $0.4\ \text{kg}$، وقيمة الخطأ النسبي المئوي، 1.6%:

$$\frac{0.4\ \text{kg} \times 100\%}{1.6\%} = 25\ \text{kg},$$

وهو ما يؤدي إلى حذف علامتَي النسبة المئوية، ويتبقى لدينا القيمة المعيارية للكتلة وهي $25\ \text{kg}$.

لنلخص الآن ما تعلمناه في هذا الشارح.

النقاط الرئيسية

- القيمة المعيارية هي القيمة الفعلية التي يُعتدُّ بها لكونها صحيحة.
- يحدث خطأ القياس عندما تختلف القيمة المَقيسة عن القيمة المعيارية.
- الخطأ المطلق هو الفرق بين القيمة المعيارية والقيمة المَقيسة، ويكون له وحدات القيم نفسها.
- الخطأ النسبي هو نسبة الخطأ المطلق إلى القيمة المعيارية، وهو بلا وحدة.
- الخطأ النسبي المئوي هو الخطأ النسبي معبَّرًا عنه في صورة نسبة مئوية.