شارح: توصيل المكثفات على التوالي والتوازي

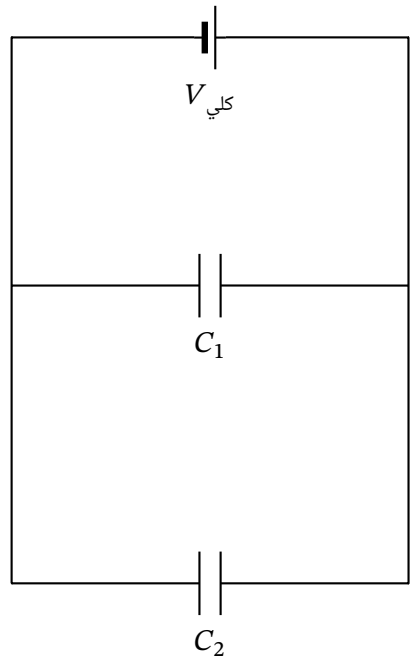
في هذا الشارح، سوف نتعلَّم كيف نحسب السعة الكلية لعدة مكثِّفات موصَّلة على التوالي أو على التوازي.

في البداية، دعونا نتذكر قانونَيْ كيرشوف؛ مما سيساعدنا على فهم تأثيرات طرق توصيل المكثِّفات المختلفة:

١. التيار الكهربي الداخل إلى نقطة يساوي التيار الكهربي الخارج من هذه النقطة.

٢. مجموع فروق الجهد الكهربي في أي مسار مغلق يساوي صفرًا.

سنبدأ نقاشنا بمكثِّفين موصلين على التوازي، كما هو موضَّح في الشكل الآتي.



لاحظ أن كل مكثِّف من المكثِّفين يوجد في فرع منفصل من الدائرة، وتذكر أن كل فرع في دائرة التوازي يتعرض لفرق الجُهد نفسه. وهو ما يؤكده قانون كيرشوف الثاني. إذن، فرق الجهد عبر المكثف الأول، V_1، يساوي فرق الجهد عبر المكثف الثاني، V_2، وفرق الجهد الذي توفره البطارية، $V_{\text{كلي}}$. توضَّح هذه العلاقة رياضيًا أدناه.

لدينا مكثِّفان في الشكل بالأعلى، لكن النقاط المتتابعة في المعادلة الآتية (وغيرها من معادلات هذا الشارح) تعني أن العلاقة مستمرة لأي عدد من المكثِّفات:

$$V_{\text{كلي}} = V_1 = V_2 = \cdots .$$

ينص قانون كيرشوف الأول على أن التيار الداخل إلى فرع في الدائرة يساوي التيار الخارج منه. تذكر أيضًا أن مقدار الشحنة التي تتدفَّق عبر أحد فروع الدائرة يساوي حاصل ضرب التيار المار في الفرع والزمن الذي تستغرقه الشحنة في التدفُّق. ومن ثَمَّ، عندما تكون الدائرة مغلقة ويكون شحن المكثفات ممكنًا لفترة من الزمن، فإن مجموع الشحنات على جميع المكثفات (Q_1، Q_2 في هذه الحالة) يساوي الشحنة في الدائرة بأكملها، $Q_{\text{كلي}}$، كما يلي:

$$Q_{\text{كلي}} = Q_1 + Q_2 + \cdots .$$

وبالفعل، نحن نعلم أنه يمكننا ربط فرق الجهد والشحنة بالسعة باستخدام المعادلة $C = \frac{Q}{V}$، التي يمكن كتابتها على الصورة

$$Q = CV.$$

لنطبق هذا على معادلة الشحنة بالأعلى بالتعويض عن Q بـ CV كالآتي:

$$Q_{\text{كلي}} = C_{\text{كلي}}V_{\text{كلي}} = C_1V_1 + C_2V_2 + \cdots .$$

تذكر أن قيم فرق الجهد عبر جميع العناصر الموصلة على التوازي تكون متساوية؛ لذا يمكننا قسمة هذه المعادلة كلها على فرق الجهد. ينتج عن ذلك المعادلة التي نستخدمها للربط بين قيمة السعة الكلية وقيمة سعة كل مكثف في حالة التوصيل على التوازي.

تعريف: السعة الكلية في حالة التوصيل على التوازي

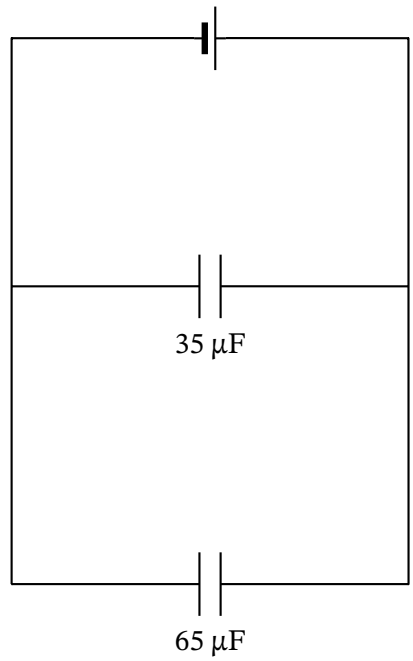
تُعطى السعة الكلية للمكثِّفات في حالة التوصيل على التوازي كالآتي:

$$C_{\text{كلي}} = C_1 + C_2 + \cdots .$$

سنتدرب على توصيل المكثِّفات على التوازي من خلال الأمثلة الآتية.

مثال ١: توصيل المكثِّفات على التوازي

تحتوي الدائرة الكهربية الموضحة في الشكل على مكثِّفين موصَّلين على التوازي. ما السعة الكلية للدائرة؟



الحل

لنبدأ بتذكر معادلة السعة الكلية للمكثفات الموصلة على التوازي:

$$C_{\text{كلي}} = C_1 + C_2 + \cdots .$$

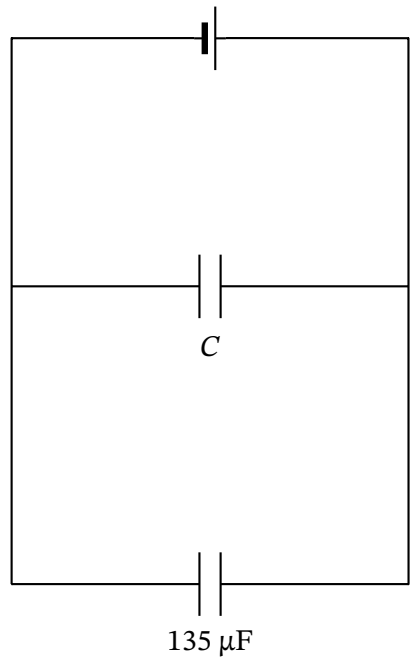
بما أن لدينا مكثِّفَيْن موصَّلَيْن على التوازي ونحن نعرف قيمتي سعتيهما، إذن فنحن مستعدون لجمعهما لإيجاد السعة الكلية للدائرة:

$$C_{\text{كلي}} = 35\ \mu\text{F} + 65\ \mu\text{F} = 100\ \mu\text{F}.$$

وبذلك نكون قد توصَّلنا إلى أن السعة الكلية لهذه الدائرة تساوي: 100 μF.

مثال ٢: توصيل المكثِّفات على التوازي

تحتوي الدائرة الكهربية الموضحة في الشكل على مكثِّفين موصلين على التوازي. السعة الكلية للدائرة: 240 μF. ما قيمة السعة C؟



الحل

علينا هنا تحديد قيمة السعة المجهولة C، ويمكننا البدء بكتابة معادلة السعة الكلية في حالة التوصيل على التوازي:

$$C_{\text{كلي}} = C_1 + C_2 + \cdots .$$

إذن، السعة الكلية تساوي مجموع سعة كل مكثّف على حدة. بالتعويض بالقيم المعطاة، تصبح المعادلة:

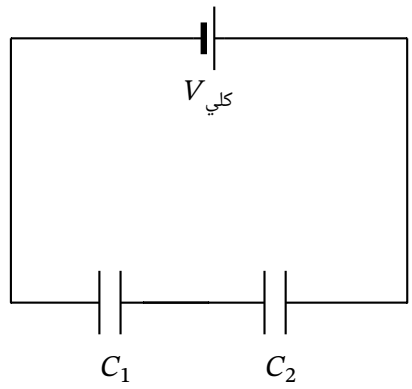
$$240\ \mu\text{F} = C + 135\ \mu\text{F}.$$

يمكننا الحل لإيجاد قيمة C بطرح $135\ \mu\text{F}$ من طرفي المعادلة:

$$C = 240\ \mu\text{F} - 135\ \mu\text{F} = 105\ \mu\text{F}.$$

ومن ثَمَّ، نكون قد توصلنا إلى أن السعة C تساوي: $105\ \mu\text{F}$.

لنركز الآن على توصيل المكثّفات على التوالي، كما هو موضَّح في الشكل الآتي.



تذكر أن التيار يكون متساويًا في جميع نقاط دائرة التوالي، وهو ما يؤكده قانون كيرشوف الأول. وهذا يعني أن المكثفات الموصلة على التوالي تُخزِّن شحنات متساوية. إذن، بالنسبة للمكثفات الموصلة على التوالي:

$$Q_{\text{كلي}} = Q_1 = Q_2 = \cdots .$$

وفقًا لقانون كيرشوف الثاني، نعلم أن مجموع فروق الجهد عبر العناصر في مسار مغلق يساوي صفرًا. ويُعد التوصيل على التوالي مسارًا مغلقًا كبيرًا، ومن ثَمَّ، فإن مجموع فروق الجهد عبر المكثفات لا بد أن يساوي فرق الجهد عبر البطارية. إذن:

$$V_{\text{كلي}} = V_1 + V_2 + \cdots .$$

مرة أخرى، تذكر أن السعة، وفرق الجهد، والشحنة بالنسبة لأي مكثف تعطى بدلالة العلاقة: $C = \frac{Q}{V}$، التي يمكننا إعادة ترتيبها على الصورة:

$$V = \frac{Q}{C}.$$

يمكننا التعويض بهذه المعادلة في معادلة فرق الجهد بالأعلى؛ بحيث تُكتب العلاقة على الصورة:

$$V_{\text{كلي}} = \frac{Q_{\text{كلي}}}{C_{\text{كلي}}} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \cdots .$$

لقد توصلنا بالفعل إلى أن الشحنات على جميع العناصر الموصلة على التوالي في الدائرة متساوية؛ لذا يمكننا قسمة المعادلة كلها على الشحنة. ومن ثَمَّ، يكون لدينا علاقة تصف قيم السعة في حالة التوصيل على التوالي.

تعريف: السعة الكلية في حالة التوصيل على التوالي

تُعطى السعة الكلية للمكثفات في حالة التوصيل على التوالي كالآتي:

$$\frac{1}{C_{\text{كلي}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots .$$

لاحظ أن كل حد في هذه المعادلة يُمثِّل مقلوبًا؛ ما يعني أنه كلما وصَّلنا المزيد من المكثفات على التوالي، تقل السعة الكلية. سنستعرض هذا المفهوم في المثالين التاليين.

مثال ٣: توصيل المكثفات على التوالي

وُصِّل المكثفان C_1، C_2 على التوالي؛ حيث $C_1 > C_2$. أي من العبارات الآتية تربط بطريقة صحيحة السعة الكلية، $C_{\text{كلي}}$ بالسعة C_1، والسعة C_2؟

أ. $C_{\text{كلي}} = C_1 + C_2$

ب. $C_{\text{كلي}} = (C_1 + C_2)^2$

ج. $C_{\text{كلي}} = C_1 C_2$

د. $C_2 < C_{\text{كلي}} < C_1$

هـ. $C_{\text{كلي}} < C_2 < C_1$

الحل

قد يبدو الخيار (أ) مألوفًا، لكن هذه المعادلة ستكون صحيحة إذا وُصِّل المكثفان على التوازي وليس على التوالي. ولذا فالخيار (أ) غير صحيح. معادلة السعة الكلية لمكثفين في حالة التوصيل على التوالي هي:

$$\frac{1}{C_{\text{كلي}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

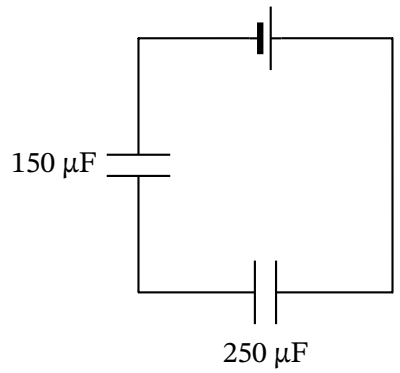
لا يمكن إعادة ترتيب هذه المعادلة أو تبسيطها إلى أي من المعادلات في الخيارين (ب) أو (ج)، إذن هذان الخياران غير صحيحين. على الرغم من أن المعادلة المذكورة بالأعلى غير موضحة مباشرة في أي خيار، يمكننا استخدامها للمقارنة بين قيم $C_{\text{كلي}}$، C_1، C_2، وتحديد إذا ما كان الخيار (د) أو (هـ) صحيحًا أم لا.

نظرًا لأن كل حد في هذه المعادلة يمثِّل مقلوبًا، يمكننا القول أن توصيل المزيد من المكثفات على التوالي، يقلل السعة الكية أو المكافئة. إذن، في حالة المكثفات الموصلة على التوالي، تكون السعة الكلية أقل من سعة أي مكثف في الدائرة. وهذا يعني أن $C_{\text{كلي}} < C_1$ وأن $C_{\text{كلي}} < C_2$.

ومن ثَمَّ، الخيار (هـ) هو الخيار الصحيح.

مثال ٤: توصيل المكثِّفات على التوالي

تحتوي الدائرة الكهربية الموضحة في الشكل على مكثِّفين موصلين على التوالي. ما السعة الكلية للدائرة؟ أجب لأقرب ميكروفاراد.



الحل

يمكننا البدء بتذكر معادلة إيجاد السعة المكافئة للمكثفات الموصلة على التوالي:

$$\frac{1}{C_{\text{كلي}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots.$$

لنعوض الآن بقيمتي سعتي المكثفين الموضحتين بالأعلى:

$$\frac{1}{C_{\text{كلي}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{150\ \mu\text{F}} + \frac{1}{250\ \mu\text{F}}.$$

لجمع الكسرين في الطرف الأيمن من المعادلة، سنستخدم 750 μF باعتباره المقام المشترك الأصغر:

$$\frac{1}{C_{\text{كلي}}} = \frac{5}{750\ \mu\text{F}} + \frac{3}{750\ \mu\text{F}} = \frac{8}{750\ \mu\text{F}}.$$

يمكننا الآن قلب طرفي المعادلة لإيجاد قيمة $C_{\text{كلي}}$ النهائية

$$C_{\text{كلي}} = \frac{750\ \mu\text{F}}{8} = 93.75\ \mu\text{F}.$$

بالتقريب لأقرب ميكروفاراد نجد أن السعة الكلية للدائرة تساوي 94 μF.

وبما أننا رأينا كيف نجمع المكثفات في حالتي التوصيل على التوالي والتوازي، فلنتدرب على كلتا المهارتين من خلال المثالين التاليين.

مثال ٥: توصيل المكثفات على التوالي والتوازي

يُمكِن توصيل مكثف سعته 135 μF ومكثف سعته 264 μF على التوالي أو على التوازي. أوجد نسبة السعة الكلية في حالة التوصيل على التوازي إلى السعة الكلية في حالة التوصيل على التوالي. قرِّب إجابتك لأقرب منزلتين عشريتين.

الحل

سنستعرض هنا تأثير طريقة توصيل مكثفين على سعتيهما الكلية. يمكننا البدء بتذكر معادلة توصيل المكثفات على التوازي:

$$C_{\text{كلي}} = C_1 + C_2 + \cdots.$$

ومن ثَمَّ، قبل التعويض بأي قيمة عن C_1 أو C_2، يمكننا القول إن السعة الكلية ستكون أكبر من سعة أي مكثِّف من المكثِّفين. بالتعويض بالقيمتين المعطاتين، يمكننا إيجاد السعة الكلية في حالة التوصيل على التوازي، التي يمكننا أن نسميها: $C_{\text{توازي}}$:

$$C_{\text{توازي}} = 135\ \mu\text{F} + 264\ \mu\text{F} = 399\ \mu\text{F}.$$

والآن، يمكننا النظر إلى معادلة توصيل المكثفات على التوالي:

$$\frac{1}{C_{\text{كلي}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots.$$

يمكننا ملاحظة أن السعة الكلية في حالة التوصيل على التوالي التي يمكن أن نسميها $C_{\text{توالي}}$ ستكون أصغر من سعة كل مكثف على حدة C_1 أو C_2. ومن ثَمَّ، نتوقع أن تكون $C_{\text{توازي}}$ أكبر من $C_{\text{توالي}}$ وأن تكون النسبة بين قيمتيهما أكبر من الواحد.

لنوجد الآن قيمة السعة الكلية في حالة التوصيل على التوالي:

$$\frac{1}{C_{\text{توالي}}} = \frac{1}{135\ \mu\text{F}} + \frac{1}{264\ \mu\text{F}}.$$

بإعادة كتابة المعادلة بحيث نتمكن من جمع الكسرين باستخدام المقام المشترك الأصغر، يكون لدينا:

$$\frac{1}{C_{\text{توالي}}} = \frac{88}{11\,880\ \mu\text{F}} + \frac{45}{11\,880\ \mu\text{F}} = \frac{133}{11\,880\ \mu\text{F}}.$$

لنأخذ مقلوب المعادلة لإيجاد قيمة $C_{\text{توالي}}$ بنقله من المقام إلى البسط:

$$C_{\text{توالي}} = \frac{11\,880\ \mu\text{F}}{133} = 89.32\ \mu\text{F}.$$

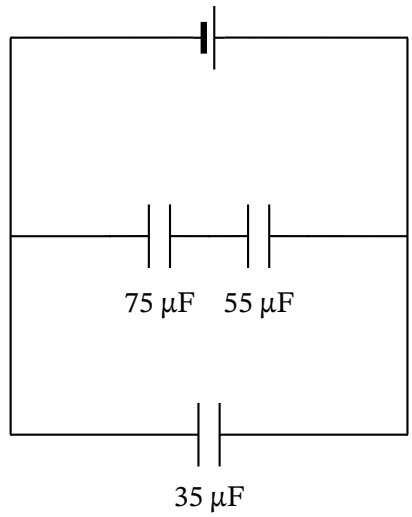
الآن وقد عرفنا قيمتي $C_{\text{توازي}}$، $C_{\text{توالي}}$ يمكننا إيجاد النسبة بينهما:

$$\frac{C_{\text{توازي}}}{C_{\text{توالي}}} = \frac{399\ \mu\text{F}}{89.32\ \mu\text{F}} = 4.4671.$$

بالتقريب لأقرب منزلتين عشريتين، نجد أن نسبة السعة الكلية في حالة التوصيل على التوازي إلى نسبة السعة الكلية في حالة التوصيل على التوالي تساوي 4.47.

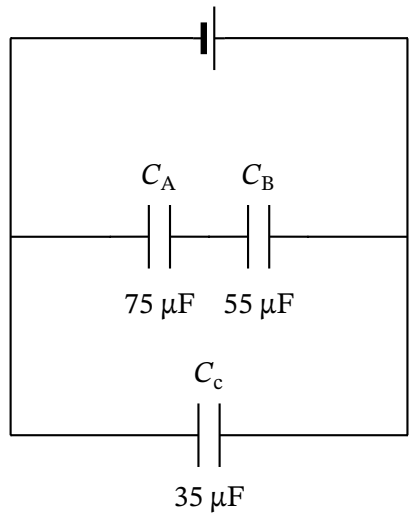
مثال ٦: توصيل المكثّفات على التوالي والتوازي

تحتوي الدائرة الكهربية الموضحة في الشكل على مكثّفات موصَلة على التوالي والتوازي. ما السعة الكلية للدائرة؟ قرّب إجابتك لأقرب ميكروفاراد.



الحل

لدينا هنا دائرة كهربية تحتوي على مكثفات موصلة على التوالي والتوازي. سنقسم هذه الدائرة إلى جزأين، ونشير إلى المكثّفات الثلاثة بالحروف A، B، C كما هو موضح في الشكل التالي.



وُصِّل المكثفان A، B على التوالي؛ لذا دعونا نوجد السعة المكافئة لهما أولًا. هذه السعة المكافئة، التي يمكننا تسميتها C_{AB} ستمثل السعة الكلية للسلك الأوسط لهذه الدائرة الموصلة على التوازي. يمكننا البدء بمعادلة إيجاد السعة في حالة

التوصيل على التوالي والتعويض بقيمتي سعتي المكثفين A، B:

$$\frac{1}{C_{\text{كلي}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots$$

$$\frac{1}{C_{\text{AB}}} = \frac{1}{C_{\text{A}}} + \frac{1}{C_{\text{B}}} = \frac{1}{75\ \mu\text{F}} + \frac{1}{55\ \mu\text{F}}.$$

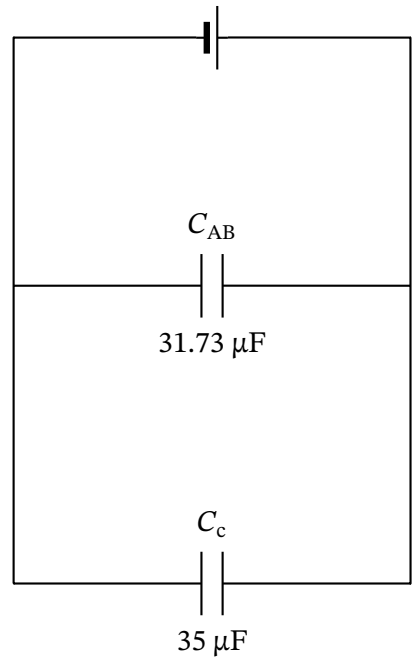
المقام المشترك الأصغر لهذين الكسرين هو:

$$\frac{1}{C_{\text{AB}}} = \frac{11}{825\ \mu\text{F}} + \frac{15}{825\ \mu\text{F}} = \frac{26}{825\ \mu\text{F}}.$$:825 μF

سنقلب الآن المعادلة، فنحصل على السعة المكافئة للمكثفين A،

$$C_{\text{AB}} = \frac{825\ \mu\text{F}}{26} = 31.73\ \mu\text{F}.$$ B

والآن يمكننا تخيل أن الدائرة تتكون فقط من مكثفين موصلين على التوازي، كما هو موضح في الشكل التالي.



لدينا الآن بالفعل مكثفان موصلان على التوازي؛ ولذا يمكننا التعويض بقيمتي سعتيهما وإيجاد السعة الكلية للدائرة بأكملها:

$$C_{\text{كلي}} = C_1 + C_2 + \cdots$$

$$C_{\text{كلي}} = C_{\text{AB}} + C_{\text{c}} = 31.73\ \mu\text{F} + 35\ \mu\text{F} = 66.73\ \mu\text{F}.$$

بالتقريب لأقرب ميكروفاراد، نجد أن السعة الكلية لهذه الدائرة تساوي: 67 μF.

لنختتم هذا الشارح بتلخيص بعض المفاهيم المهمة.

النقاط الرئيسية

- في حالة توصيل المكثفات على التوازي، نستخدم: $C_{\text{كلي}} = C_1 + C_2 + \cdots$.
- في حالة توصيل المكثفات على التوالي، نستخدم: $\frac{1}{C_{\text{كلي}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots$.
- المكثفات الموصلة على التوازي لها فروق جهد متساوية.
- المكثفات الموصلة على التوالي تُخزِّن شحنات متساوية.